



Dérivation : Dérivabilité à droite à gauche	• f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell \in \mathbb{R} \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell \in \mathbb{R} \right)$ $\ell = f'(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé de f en x_0. • f est dérivable à droite de $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_d \in \mathbb{R} \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_d \in \mathbb{R} \right)$ $\ell_d = f'_d(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0. • f est dérivable à gauche de $x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ell_g \in \mathbb{R} \cdot \left(\lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \ell_g \in \mathbb{R} \right)$ $\ell_g = f'_g(x_0)$ s'appelle le nombre dérivé à gauche de f en x_0. • f est dérivable au point $x_0 \Leftrightarrow f$ est dérivable à droite et à gauche et $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$
Interprétation géométrique du nombre dérivé $f'(x_0)$	• $f'(x_0)$ est le coefficient directeur de la tangente (T) à la courbe de f au point d'abscisse x_0 • équation de la tangente (T) au point d'abscisse x_0 est : $(T): y = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$. • Si $f'(x) = 0$ alors la tangente est parallèle à l'axe des abscisse. • La fonction $u(x) = (x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$ s'appelle la fonction affine tangente à la courbe de f au voisinage de x_0. • La fonction $(x - x_0)f'(x_0) + f(x_0)$ est une approximation affine de la fonction f au voisinage de x_0. On écrit $f(x) \approx u(x)$ au voisinage de x_0. • On pose $x = x_0 + h$ on a $f(x_0 + h) \approx u(x_0 + h)$ ou encore $f(x_0 + h) \approx hf'(x_0) + f(x_0)$
Dérivabilité sur un intervalle	• f est dérivable sur un intervalle ouvert $(I =]a, b[) \Leftrightarrow$ pour tout x de I f est dérivable en x • f est dérivable sur $[a, b[\Leftrightarrow f$ est dérivable sur $]a, b[$ et f est dérivable à droite de a • f est dérivable sur $]a, b] \Leftrightarrow f$ est dérivable sur $]a, b[$ et f est dérivable à gauche de b • f est dér. sur $[a, b] \Leftrightarrow f$ est dérivable sur $]a, b[$ et f est dérivable à droite de a et à gauche de b
La fonction dérivée	• La fonction définie par : $\forall x \in I$ on a $x \mapsto f'(x)$ s'appelle la fonction dérivée de f sur I on note f'. • La fonction dérivée de f' sur I s'appelle la fonction dérivée seconde (dérivée d'ordre 2) on note f'' ou $f^{(2)}$. • La fonction dérivée de $f^{(n)}$ sur I s'appelle la fonction dérivée $(n+1)^{\text{ième}}$ (dérivée d'ordre $n+1$) on note $(f^{(n)})'$ ou $f^{(n+1)}$
Operations sur les fonctions dérivables	$(f + g)' = f' + g'$ $(\alpha \times f)' = \alpha \times f'$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
	$(f \times g)' = f' \times g + f \times g'$ $(f^n)'(x) = n \times (f(x))^{n-1} \times f'(x)$; $n \in \mathbb{Z}^*$; $g(x) \neq 0$
	$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$; $(x \in I, g(x) \neq 0)$ $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \times g - f \times g'}{g^2}$; $(x \in I, g(x) \neq 0)$



	f est dérivable en x_0 et g est dérivable en $f(x_0)$ alors la fonction $g \circ f$ est dérivable en x_0 et on a : $(g \circ f)'(x_0) = f'(x_0) \times g'(f(x_0))$	
Applications de $(g \circ f)'(x)$	$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2 \times \sqrt[n]{f(x)}} ; x \in D_f, \text{ et } f(x) > 0$	$(\sin(ax+b))' = a \times \cos(ax+b) ; \text{ sur } \mathbb{R}$
	$(\tan(ax+b))' = a \times [1 + \tan^2(ax+b)]$ $= a \times \frac{1}{\cos^2(ax+b)}$ $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z}$	$(\cos(ax+b))' = -a \times \sin(ax+b) ; \text{ sur } \mathbb{R}$
La fonction dérivée de la fonction réciproque	f^{-1} est la fonction réciproque de la fonction f (avec f est continue et strictement monotone sur I et $f(I) = J$) . ($(x_0 \in I) ; x_0 \mapsto f(x_0) = y_0 ; (y_0 \in J)$) - Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$ alors la fonction f^{-1} est dérivable en $f(x_0) = y_0$. - On a $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$ ou $(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$.	
Applications	$g'(x) = (\sqrt[n]{x})' = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1} ; n \in \mathbb{N}^*$	$\left(\sqrt[n]{f(x)}\right)' = \left(f(x)^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} \times f'(x) \times (f(x))^{\frac{1}{n}-1}$
	$g'(x) = (x^r)' = r x^{r-1} ; r \in \mathbb{Q}^*$	$([f(x)]^r)' = r \times f'(x) \times [f(x)]^{r-1} ; r \in \mathbb{Q}^*$
Applications de la dérivation		
La fonction dérivée f'	Extremums	- f est dérivable sur un intervalle ouvert I et f admet un extremum en $a \in I$ alors $f'(a) = 0$. - f est dérivable sur un intervalle ouvert I et $f'(a) = 0$ ($a \in I$) et f' change de signe au voisinage de a alors $f(a)$ est un extremum de f.
	Monotonie de f	- Si $\forall x \in I : f'(x) > 0$ (même si f' s'annule en un nombre fini de points) alors f est strictement croissante sur l'intervalle I. - Si $\forall x \in I : f'(x) < 0$ (même si f' s'annule un nombre fini de point) alors f est strictement décroissante sur l'intervalle I. - Si $\forall x \in I : f'(x) = 0$ alors f est constante sur I.
La fonction dérivée f''	Position relative de la tangente et la courbe – la concavité	$\forall x \in I : f''(x) > 0$ (la fonction dérivée seconde) alors : - La courbe (C_f) de f est située au dessus des tangentes pour tout point $M(x_0, f(x_0))$ tel que $x_0 \in I$. - Dans ce cas on dit que la courbe (C_f) de f est convexe (ou sa concavité est dans le sens des ordonnées positives . on note )
		$\forall x \in I : f''(x) < 0$ (la fonction dérivée seconde) alors :



		- La courbe (C_f) de f est située au dessous des tangentes pour tout point $M(x_0, f(x_0))$ tel que $x_0 \in I$. - Dans ce cas on dit que la courbe (C_f) de f est concave (ou sa concavité est dans le sens des ordonnées négatives). on note $\wedge$
	Points d'inflexions	Si la fonction dérivée seconde f'' s'annule en $x_0 \in I$ (I intervalle ouvert) et f'' change de signe au voisinage de x_0 alors le point d'abscisse $A(x_0, f(x_0))$ est un point d'inflexion au courbe (C_f) ; dans ce cas la tangente au point $A(x_0, f(x_0))$ coupe (ou traverse) la courbe.
Centre de symétrie de (C_f)		Le point $I(a, b)$ est centre de symétrie à la courbe $(C_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) + f(x) = 2b \end{cases}$
Axe de symétrie de (C_f)		La droite d'équation $D: x = a$ est un axe de symétrie à la courbe $(C_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \forall x \in D_f ; 2a - x \in D_f \\ \forall x \in D_f ; f(2a - x) = f(x) \end{cases}$
Domaine d'étude d'une fonction f	f est paire f est impaire	f est une fonction définie sur $D_f = I \cup I'$ (I et I' sont symétriques par rapport à 0 (zéro) avec I contient juste les nombres positifs). - Si f est paire ou bien impaire il suffit d'étudier la monotonie de f sur I - Si f est paire : la fonction f a la même monotonie (même variations) sur I et I' - Si f est impaire : la monotonie de f sur I et I' sont opposées. - donc il suffit d'étudier f sur $D_E = D_f \cap \mathbb{R}^+ = I$ (D_E est appelé ensemble d'étude de f)
	f est périodique	f est périodique de période $P = T$ son ensemble d'étude est $D_E = D_f \cap [a, a + T]$ avec $a \in \mathbb{R}$. - On préfère $a = 0$ ou bien $a = -\frac{T}{2}$ - On obtient : $D_E = D_f \cap [0, T]$ ou bien : $D_E = D_f \cap \left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$



Les branches infinies

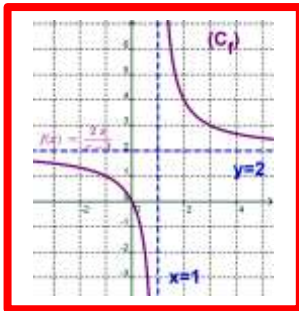
1^{er} cas

Asymptote horizontale

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = a$$

(C_f) admet une asymptote horizontale c'est la droite d'équation $y = a$ au voisinage de $\pm\infty$

Exemple : asymptote horizontale d'équation $y = 2$ au voisinage de $\pm\infty$

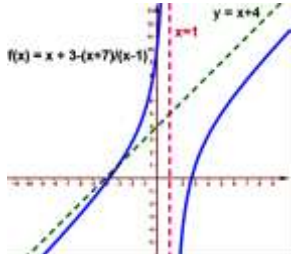


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = b \in \mathbb{R}$$

(C_f) admet une asymptote oblique la droite d'équation $y = ax + b$ au voisinage de $\pm\infty$

Exemple $f(x) = x + 3 - \frac{(x+7)}{(x-1)}$



Rq : position relative de (C_f) et (D) on étudie le signe de $f(x) - (ax + b)$

3^{ème} cas

Asymptote oblique et les trois cas particuliers

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$

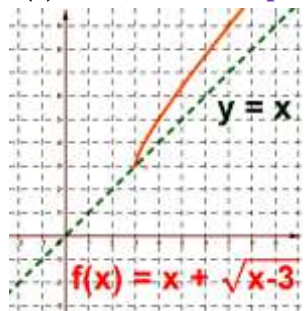
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = a \in \mathbb{R}^*$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - ax) = \pm\infty$$

cas particulier 3 : $a \in \mathbb{R}^*$ et $b = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D la droite $y = ax$ au voisinage de $\pm\infty$

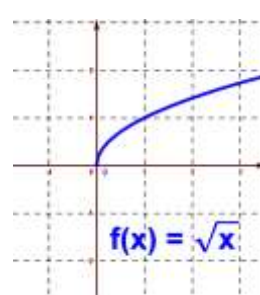
Exemple $f(x) = x + \sqrt{x-3}$



cas particulier 2 : $a = 0$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des abscisses

Exemple $f(x) = \sqrt{x}$



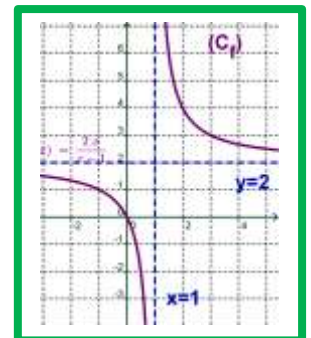
2^{ème} cas

Asymptote verticale

$$\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$$

(C_f) admet une asymptote verticale c'est la droite d'équation $x = a$

Exemple : asymptote verticale d'équation $x = 1$

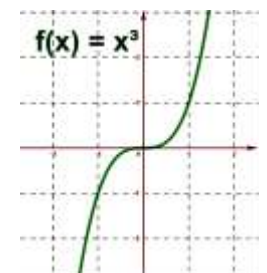


$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = \pm\infty$$

cas particulier 1 : $a = \pm\infty$

(C_f) admet une B.P.D l'axe des ordonnées

Exemple $f(x) = x^3$



les cas particuliers (Remarque : B.P.D= branche parabolique de direction)