

### Continuité en un point:



- $f$  est continue en  $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$
- $f$  est continue à droite en  $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$
- $f$  est continue à gauche en  $a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

**Propriété**  $f$  est continue en  $a \Leftrightarrow f$  est continue à droite et à gauche en  $a$

### Continuité sur un intervalle :

- ✓  $f$  est continue sur  $]a, b[$  s'elle est continue en tout point de  $]a, b[$
- ✓  $f$  est continue sur  $[a, b]$  s'elle est continue sur  $]a, b[$  et continue à droite en  $a$  et continue à gauche en  $b$

### Continuité des fonctions usuelles:

- Tout fonction polynôme est continue sur  $\mathbb{R}$
- Toute fonction rationnelle est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition
- $x \rightarrow \sqrt{x}$  est continue sur  $[0, +\infty[$
- $x \rightarrow \sin x$  et  $x \rightarrow \cos x$  sont continues sur  $\mathbb{R}$
- $x \rightarrow \tan x$  est continue sur chaque intervalle de son domaine de définition.

### Opération sur les fonctions continues :

Si  $f$  et  $g$  sont continues sur  $I$

- alors les fonctions  $f + g$  et  $f - g$  et  $f \times g$  et  $\alpha f$  sont continues sur  $I$ , ( $\alpha \in \mathbb{R}$ )
- si de plus  $g$  ne s'annule pas sur  $I$  alors  $\frac{1}{g}$  et  $\frac{f}{g}$  sont continues sur  $I$

### L'image d'un intervalle par une fonction continue

L'intervalle $I$	L'intervalle $f(I)$	
	$f$ strictement croissante sur $I$	$f$ strictement décroissante sur $I$
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$]a, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$[a, b[$	$\left[ f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a) \right[$
$]a, b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b) \right]$	$\left[ f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$
$[a, +\infty[$	$\left[ f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a) \right]$
$]a, +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right[$
$] -\infty, b]$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(b) \right]$	$\left[ f(b), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$
$] -\infty, b[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$
$] -\infty, +\infty[$	$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$

### Continuité de la composée de deux fonction :

Si  $f$  est continue sur  $I$  et  $g$  continue sur  $J$  tel que  $f(I) \subset J$  alors  $g \circ f$  est continue sur  $I$

**Résultats** -si  $f$  est continue et positive sur  $I$  alors  $\sqrt{f}$  est continue sur  $I$  .

-si  $f$  est continue sur  $I$  alors  $f^n$  est continue sur  $I$  . ( $n \in \mathbb{N}^*$ )

### Théorème des valeurs intermédiaires:

$\left\{ \begin{array}{l} f \text{ est continue sur } [a, b] \\ \beta \text{ entre } f(a) \text{ et } f(b) \end{array} \right.$



$\exists \alpha \in [a, b] ; f(\alpha) = \beta$

### Résultats :

- $f$  continue sur  $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$



L'équation  $f(x) = 0$  admet au moins une solution  $\alpha$  dans  $[a, b]$

- $f$  continue et strictement monotone sur  $[a, b]$
- $f(a) \cdot f(b) < 0$



L'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha$  dans  $[a, b]$

### La méthode de dichotomie

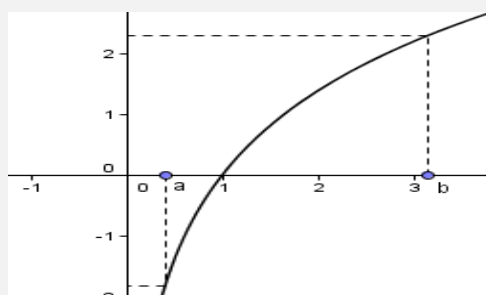
Est une méthode pour trouver une solution approchée à une équation  $f(x)=0$ . Précisément, supposons que la fonction  $f$  est continue sur l'intervalle  $[a, b]$ , avec  $f(a)<0$  et  $f(b)>0$ . On sait donc qu'il existe au moins un réel  $c$  dans l'intervalle  $[a, b]$  tel que  $f(c)=0$ .

L'idée est alors d'évaluer ce que vaut  $f$  au milieu de  $[a, b]$ , et de distinguer les deux cas suivants :

- si  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) > 0$ , alors on sait qu'on a une racine dans l'intervalle  $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$
- sinon,  $f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$  et on sait qu'on a une racine dans l'intervalle  $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ .

Ainsi, dans les deux cas, on a trouvé un intervalle de longueur moitié dans lequel est située une racine de l'équation  $f(x)=0$ . On recommence alors avec cet intervalle, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on trouve une approximation qui nous convienne

$f(\alpha) = 0 \iff (C_f) \text{ coupe l'axe des abscisses au point } A(\alpha, 0)$



## Fonction réciproque

### Propriétés :

- Si  $f$  continue et strictement monotone sur  $I$
- Et  $y \in f(I)$



L'équation  $f(x) = y$  admet une seule solution dans  $I$

Si  $f$  est continue et strictement monotone sur  $I$  alors  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie sur  $J = f(I)$ .

$$f: I \rightarrow J \text{ et } f^{-1}: J \rightarrow I$$

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

$$(\forall x \in I), f^{-1} \circ f(x) = x$$

$$(\forall y \in J), f \circ f^{-1}(y) = y$$

- ✓ La fonction  $f^{-1}$  est continue sur  $J$  et a le même sens de variation de  $f$  sur  $I$
- ✓ Les courbes  $(C_f)$  et  $(C_{f^{-1}})$  sont symétriques par rapport à la droite  $(D): y = x$

## La fonction racine $n^{\text{ième}}$ : $(\sqrt[n]{\phantom{x}})$ , $n \in \mathbb{N}^*$

$$x \in \mathbb{R}_+, y \in \mathbb{R}_+$$

$$x^n = y \Leftrightarrow \sqrt[n]{y} = x$$

- ✓ La fonction  $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$  est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$
- ✓ Cas particuliers :  $\sqrt[1]{x} = x$ ,  $\sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^+$

Propriétés :  $x, y \in \mathbb{R}^+$  ;  $n, m \in \mathbb{N}^*$

$$\sqrt[n]{x^n} = x ; (\sqrt[n]{x})^n = x ; (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} ; \sqrt[nm]{x^m} = \sqrt[n]{x}$$

$$\sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy} ; \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad (y \neq 0) ; \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[nm]{x} ; \sqrt[p]{x^{np}} = x^n$$

### Limites :

$$\lim f(x) = +\infty \Rightarrow \lim \sqrt[n]{f(x)} = +\infty ; \lim f(x) = \ell \geq 0 \Rightarrow \lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$$

$$a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2} \rightarrow \sqrt[3]{a} - \sqrt[3]{b} = \frac{a - b}{\sqrt[3]{a}^2 + \sqrt[3]{a} \cdot \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b}^2}$$

## Continuité :

si  $f$  est une fonction continue et positive sur  $I$  alors  $\sqrt[n]{f}$  est continue sur  $I$

## Puissance rationnelle d'un nombre réel strictement positif :

$n \in \mathbb{N}^*, m \in \mathbb{Z}$  Pour tout  $x$  de  $]0, +\infty[$  on a :  $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

$$x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x} \quad ; \quad x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Propriété :  $r, r' \in \mathbb{Q} \quad ; \quad x, y \in \mathbb{R}_+^*$

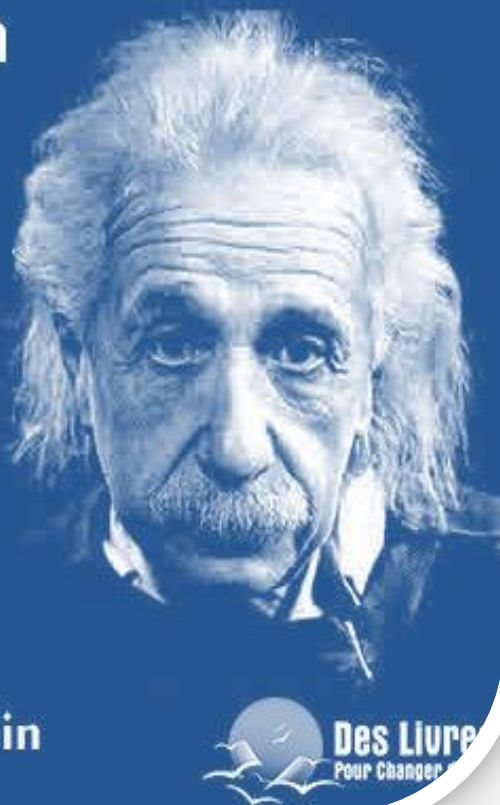
$$x^r \times x^{r'} = x^{r+r'} \quad , \quad (x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$$

$$(xy)^r = x^r \times y^r \quad , \quad \left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad , \quad x^{-r} = \frac{1}{x^r}$$

« Tout le monde est un génie.  
Mais si vous jugez un poisson  
sur sa capacité à grimper  
dans un arbre, il passera  
sa vie entière à croire  
qu'il est stupide. »

- Albert Einstein



Des Livres  
Pour Changer