

# LIMITE ET CONTINUITE

## I) LIMITES D'UNE FONCTION

### 1) Activité et rappelles

#### 1.1 Activités :

##### Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{4-5x}-3}{1-\sqrt{2+x}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2+x}{|x^2+x|-2x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 7x}{5x}$$

##### Activité 2 :

Considérons la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + x - 4}{\sqrt{x^2 + 3} - 2} & ; \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = 14 \end{cases}$$

1- Déterminer  $D_f$

2- a) Déterminer :  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ .

b) Comparer  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$  et  $f(1)$

On dit que  $f$  est continue en  $x_0 = 1$

### 2) Rappelles

#### 2.1 Définition

##### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $a$  et  $l$  un réel. On dit que la fonction  $f$  tend vers le réel  $l$  quand  $x$  tend vers  $a$  si :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 < |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon)$

#### 2.2 Opérations sur les limites

### 2) Opérations sur les limites

Toutes les propriétés qui seront citées dans ce paragraphe sous forme de tableau sont admises et on peut les démontrer en utilisant les définitions des limites.

#### 1) Limite de la somme

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x)$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$

Formes indéterminées

Ces propriétés sont vraies si  $x$  tend vers  $a^+$  ;  $a^-$  ;  $+\infty$  ou  $-\infty$

**Formes indéterminées** : Veut dire qu'on ne peut pas calculer la limite directement, il faut faire d'autres calculs car il y a plusieurs cas.

##### Exemples :

❶  $f(x) = 2 + x^2$  ,  $g(x) = 5 - x^2$  on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = 7$

Exemple :  $f(x) = 2 + x^2$ ,  $g(x) = 5 - x$  on a  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$  et

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - x + 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \left(1 - \frac{1}{x} + \frac{7}{x^2}\right) = +\infty$$

Dans les deux exemples on a le même cas que dans la dernière colonne du tableau mais on a deux résultats différents

### 2) Limites des produits

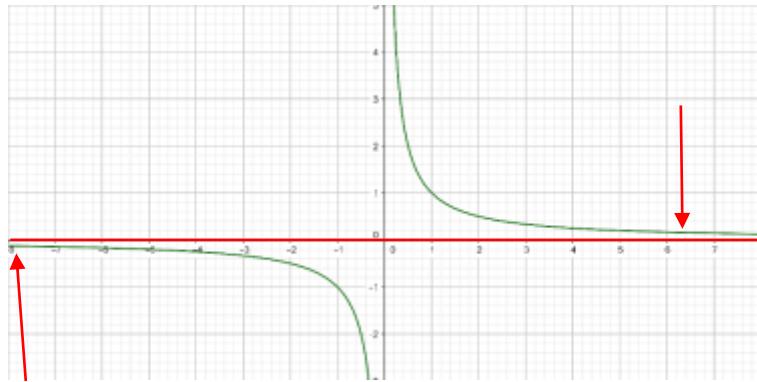
$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l > 0$ ou $+\infty$		$l < 0$ ou $-\infty$		$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x)$	$l \cdot l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Formes indéterminées

### 3) Limites des inverses

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{f}\right)(x)$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0

Remarque :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0^+$  veut dire que  $f$  tend vers 0 mais de la droite.

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$  ( $0^+$ )  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$  ( $0^-$ ) chose qu'on voit bien sur la courbe de la fonction  $f$



### 3) Limites des quotients

$\lim_{x \rightarrow a} f(x)$	$l$	$l > 0$ ou $+\infty$		$l < 0$ ou $-\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} g(x)$	$l' \neq 0$	$0^+$	$0^-$	$0^+$	$0^-$	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x)$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Formes indéterminées	Formes indéterminées

#### Exemple :

On veut déterminer la  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2}$  on a :

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 1^+} (3x+1) = 4 \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} (x^2+x-2) = 0^+ \end{cases}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{3x+1}{x^2+x-2} = +\infty$$

$x$	$-\infty$	$-2$	$1$	$+\infty$
$x^2 + x - 2$	+	0	-	0

#### Remarque :

- Eviter d'écrire ces expressions qui n'ont pas de sens mathématique :  $\frac{?}{0^+}$ ,  $\frac{?}{0^-}$
- Ne pas utiliser  $+\infty$  ou  $-\infty$  dans les opérations dans  $\mathbb{R}$  ( $+\infty$  et  $-\infty$  ne sont pas des réels)

## Exercices

Déterminer les limites suivantes :  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - x}{2x^3 + 2x - 4}$        $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{x^2-3x+2}$

## II) CONTINUITÉ D'UNE FONCTION EN UN POINT

### Définition :

Soit  $f$  une fonction définie **sur un intervalle de centre  $a$** . On dit que la fonction  $f$  est **continue** en  $a$  si :

elle admet une limite finie en  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

C'est-à-dire :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

### Exemples :

Considérons la fonction  $f$  définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^3 - x - 14}{x^2 - x - 2} & ; \text{ si } x > 2 \\ f(x) = \frac{x - 2}{2x^2 + x - 10} & ; \text{ si } x < 2 \\ f(2) = \frac{1}{9} \end{cases}$$

En utilisant la notion des limites étudier la continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 2$ .

## 3- Interprétations graphiques

### 3.1 Activité :

#### Activité 1:

Considérons la fonction  $f$  définie par :  $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & x < 1 \\ -x^2 + 4x, & x \geq 1 \end{cases}$

1- Déterminer  $f(1)$  et étudier la continuité de la fonction  $f$  en  $x_0 = 1$

2- Représenter graphiquement la fonction  $f$ .

#### Activité 2 :

Considérons la fonction  $h$  définie par :  $h(x) = \begin{cases} 2x + 2, & x < -1 \\ -3x + 3, & x > -1 \end{cases}$  et  $h(-1) = 3$

1- a) la fonction  $h$  admet-elle une limite en  $x_0 = -1$

b) la fonction  $h$  est-elle continue en  $x_0 = -1$

2- Représenter graphiquement la fonction  $h$ .



La courbe de la fonction

$f(x) = ax^2 + bx + c$  est la parabole de sommet  $\Omega\left(\frac{-b}{2a}, f\left(\frac{-b}{2a}\right)\right)$  et d'axe  $\Delta : x = \frac{-b}{2a}$

## 3.2 Interprétations

La courbe	L'interprétation
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f</math> est définie en 1</li> <li>• <math>f</math> n'admet pas de limite en 1</li> <li>• <math>f</math> n'est pas continue en 1</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f</math> est définie en 1</li> <li>• <math>f</math> admet une limite en 1 et <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) \neq f(1)</math></li> <li>• <math>f</math> n'est pas continue en 1</li> </ul>
	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <math>f</math> est définie en 1</li> <li>• <math>f</math> admet une limite en 1 et <math>\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)</math></li> <li>• <math>f</math> est continue en <math>a</math></li> </ul>

### Exercice :

Etudier la continuité de la fonction

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{3}{x}\right), & x \neq 0 \\ f(0) = 0, & x \geq 1 \end{cases}$$



Utiliser le fait que

$$(\forall \alpha \in \mathbb{R})(|\sin \alpha| \leq 1)$$

## III) CONTINUITÉ A DROITE CONTINUITÉ A GAUCHE.

### 1) Activité et définition.

#### 1.1 Activité.

#### Introduction

Dans l'exercice précédent où  $f$  était définie par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{2x^3 - x - 14}{x^2 - x - 2} ; \text{ si } x > 2 \\ f(x) = \frac{x - 2}{2x^2 + x - 10} ; \text{ si } x < 2 \\ f(2) = \frac{1}{9} \end{cases}$$

On a trouvé que :  $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = \frac{1}{9} = f(2)$  ; on dit que **la fonction  $f$  est continue à gauche de 2** et  $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) \neq \frac{1}{9} = f(2)$  on dit que **la fonction  $f$  n'est pas continue à droite de 2**.

#### 1.2 Définitions

#### Définition

❶ Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $[a, a + r[$  (où  $r > 0$ )

On dit que la fonction  $f$  est **continue à droite de  $a$**  si :  $f$  admet une limite finie à droite de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$

C'est-à-dire :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq x - a < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

❷ Soit  $f$  une fonction définie sur un intervalle de la forme  $]a - r, a]$  (où  $r > 0$ )

On dit que la fonction  $f$  est **continue à gauche de  $a$**  si :  $f$  admet une limite finie à gauche de  $a$  et  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$

C'est-à-dire :  $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \alpha > 0)(\forall x \in D_f)(0 \leq a - x < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon)$

## Théorème

Une fonction est continue en un point  $a$  si et seulement si elle est continue à droite et à gauche de  $a$

### Exercice 1:

Etudier la continuité de la fonction  $\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 - x - 2}{|4x - 3| - 1} & \text{si } x \neq 1 \\ f(1) = \frac{5}{4} & \text{en } a = 1 \end{cases}$

### Exercice 2 :

Soit la fonction  $g$  définie par :  $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 + x - 6}{\sqrt{2x+12} - 4} & \text{si } x > 2 \\ g(x) = \frac{x^2 + ax - a + 1}{x - 2} & \text{si } x < 2 \\ g(2) = l & \end{cases}$

Existent- $t$ -il  $\alpha$  et  $l$  pour que  $g$  soit continue en 2 ?

## III) OPERATIONS SUR LES FONCTIONS CONTINUES.

### 1) Continuité sur un intervalle

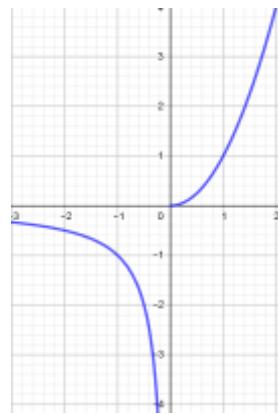
#### Définition :

Soit  $f$  une fonction dont le domaine de définition est  $D_f$ , soit  $]a, b[$  un intervalle inclus dans  $D_f$

- On dit que  $f$  est continue sur l'ouvert  $]a, b[$  si elle est continue en tout point de  $]a, b[$
- On dit que  $f$  est continue sur  $[a, b[$  si elle est continue sur  $]a, b[$  et à droite de  $a$
- On dit que  $f$  est continue sur  $[a, b]$  si elle est continue sur  $]a, b[$ , à droite de  $a$  et à gauche de  $b$

#### Remarque :

- ✓ Si une fonction  $f$  est continue sur  $[a, b]$  et sur  $[b, c]$  elle est continue sur  $[a, c]$
  - ✓ En général si  $f$  est continue sur un intervalle  $I$  et sur un intervalle  $J$  et si  $I \cap J \neq \emptyset$  alors  $f$  est continue sur  $I \cup J$ .
  - ✓  $f$  peut-être continue sur  $[a, b[$  et sur  $[b, c]$  sans qu'elle soit continue sur  $[a, c]$
- Dans le graphique ci-dessous  $f$  est continue sur  $[-3, 0[$  et continue sur  $[0, 2]$  mais pas continue sur  $[-3, 0]$  car elle n'est pas continue en 0



$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

## 2) Opérations sur les fonctions continues

### 2.1 Rappelles sur les opérations sur les limites finies

Propriété :

Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions tels que :  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$   $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = l'$  on a :

- $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = l + l'$
- $\lim_{x \rightarrow a} (f \times g)(x) = l \times l'$
- $\lim_{x \rightarrow a} (|f|)(x) = |l|$
- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{1}{g}\right)(x) = \frac{1}{l'} \quad l' \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{l}{l'} \quad l' \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow a} (\sqrt{f})(x) = \sqrt{l} \quad l > 0$

Ces propriétés sont vraies à droite et à gauche d'un réel  $a$ .

### 2.2 Opérations sur les fonctions continues

Grace à la propriété précédente et à la définition de la continuité on peut en déduire :

Propriété :

① Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$  alors :

- $f + g$
- $f \times g$
- $|f|$

sont des fonctions continues en  $a$

② Si  $f$  et  $g$  sont deux fonctions continues en  $a$  et  $g(a) \neq 0$  alors

- $\frac{1}{g}$
- $\frac{f}{g}$

sont des fonctions continues en  $a$ .

③ Si  $f$  une fonction continue en  $a$  et  $f(a) \geq 0$  alors :

- $\sqrt{f}$  est continue en  $a$

Remarque :

La propriété précédente reste vraie soit à droite de  $a$ , à gauche de  $a$  ou sur un intervalle  $I$  (En tenant compte des conditions)

## Résultat :

Une fonction polynôme sur  $\mathbb{R}$  est définie comme la somme des plusieurs monômes

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

Et puisque la fonction  $x \mapsto x^n$  est continue sur  $\mathbb{R}$  donc la fonction  $x \mapsto kx^n$  et par suite

## Propriété :

Tout fonction polynôme est continue sur  $\mathbb{R}$

## Propriété :

Toute fonction rationnelle  $f$  est continue sur tout intervalle  $I \subset D_f$

## Propriété :

Les fonctions  $\sin$  et  $\cos$  sont continue sur  $\mathbb{R}$

## Exemples :

❶  $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 3}$  est continue sur  $\mathbb{R}$  car  $x \mapsto x^2 + x + 3$  étant une fonction polynôme donc elle est continue sur  $\mathbb{R}$  de plus ( $\forall x \in \mathbb{R})(x^2 + x + 3 \geq 0)$  (Son discriminant  $\Delta$  est négatif)

❷  $g(x) = \frac{4x^3 + x + 1}{x^2 + 2x - 3}$  est continue sur  $]-\infty, -3[$  ; sur  $]-3, 1[$  et sur  $]1, +\infty[$ .

❸ La fonction  $\tan$  est continue sur tous le intervalles de la forme :  $\left] \frac{-\pi}{2} + k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right[$  ( où  $k \in \mathbb{Z}$  )

## IV) IMAGE D'UN INTERVALLE PAR UNE FONCTION CONTINUE

### 1) Image d'un segment (intervalle fermé) :

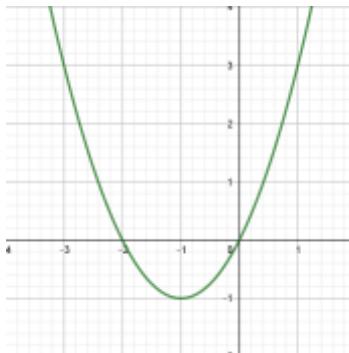
#### Activité :

Le graphe ci-contre est le graphe de la fonction  $f(x) = x^2 + 2x$

1- Déterminer graphiquement les images des intervalles

$$I_1 = [0,1], I_2 = [-3,-1], I_3 = [-3,1]$$

2- Montrer algébriquement que  $f([-3,1]) = [-1,3]$



#### Rappelle :



$$f(I) = J \Leftrightarrow \begin{cases} f(I) \subset J \\ J \subset f(I) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in I)(f(I) \subset J) \\ (\forall y \in J)(\exists y \in J)(f(x) = y) \end{cases}$$

#### Théorème : (Admis)

L'image d'un segment  $[a, b]$  par une fonction continue est le segment  $[m, M]$  où :

$$m = \min_{x \in [a,b]} f(x) \quad \text{et} \quad M = \max_{x \in [a,b]} f(x)$$

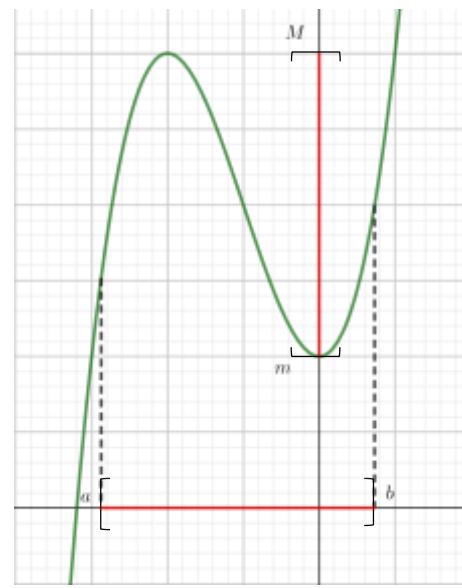
La courbe ci-contre est la courbe de la fonction

$$f(x) = x^3 + 3x^2 + 2$$

$$f([a, b]) = [m, M]$$



continuitéamgeintervalle.ggb



Cas particulier :

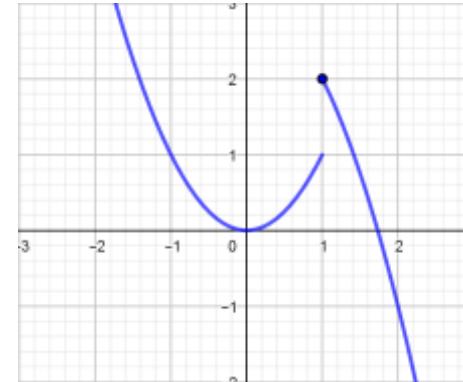
- Si  $f$  est continue croissante sur  $[a, b]$  alors  $f([a, b]) = [f(a), f(b)]$
- Si  $f$  est continue décroissante sur  $[a, b]$  alors  $f([a, b]) = [f(b), f(a)]$

Remarque :

La continuité dans le théorème précédent est suffisante mais pas nécessaire

Dans la figure ci-contre  $f$  n'est pas continue mais

$$f([0, 2]) = [f(2), f(1)] = [-1, 2]$$



## 2) Image d'un intervalle.

### 2.1 Théorème général

Théorème (admis)

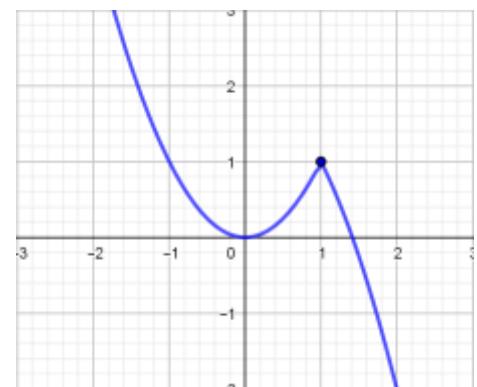
L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Remarque :

L'intervalle  $I$  et son image  $f(I)$  par une fonction continue n'ont pas nécessairement la même forme.

Dans le cas de la courbe ci-contre on a :

$$f([0, 2]) = [-2, 1]$$



## 2.2 Cas d'une fonction strictement monotone :

L'intervalle $I$	$f(I) : f$ strictement croissante	$f(I) : f$ strictement décroissante
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b[$	$] \lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$[a, +\infty[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(a)]$
$] - \infty, b[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow b^-} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$
$] - \infty, +\infty[$	$] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$	$] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$

### Remarque

Si  $f$  n'est pas strictement monotone sur l'intervalle  $I$ , on peut utiliser les propriétés précédentes en subdivisant l'intervalle  $I$  en intervalles où  $f$  est strictement monotone et on utilise la propriété  $f(I_1 \cup I_2) = f(I_1) \cup f(I_2)$ .

### Exercice :

- 1- Dresser le tableau de variation de la fonction  $f(x) = 2x^2 - 3x^2$
- 2- Déterminer les images des intervalles suivants :  $] - 1, 0]$ ;  $[1, 2]$ ;  $[-1, 2[$ ;  $[0, +\infty[$

## V) THEOREME DES VALEURS INTERMEDIERES – TVI.

### 1) Le théorème :

#### 1.1 Cas général

##### Preuve :

Rappelons que :  $f(I) = J \Leftrightarrow \begin{cases} (\forall x \in I)(f(x) \in J) \\ (\forall y \in J)(\exists x \in I)(f(x) = y) \end{cases}$

Soit  $f$  une fonction continue sur un intervalle  $I$ ;  $a$  et  $b$  deux éléments tels que :  $a < b$ .

On sait que  $f([a, b]) = [m, M]$  où  $m = \min_{x \in [a, b]} f(x)$  et  $M = \max_{x \in [a, b]} f(x)$

On a donc  $f(a) \in [m, M]$  et  $f(b) \in [m, M]$ .

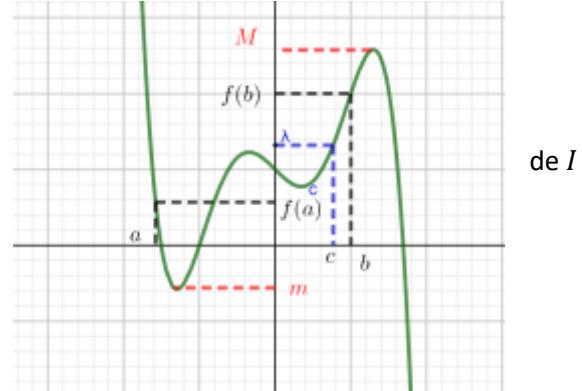
Soit  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  on a donc :  $\lambda \in [m, M]$  et puisque  $f([a, b]) = [m, M]$  donc  $\lambda$  admet au moins un antécédent  $c$  dans l'intervalle  $[a, b]$ .

D'où pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$

##### Théorème T.V.I :

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ .

Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$



de  $I$

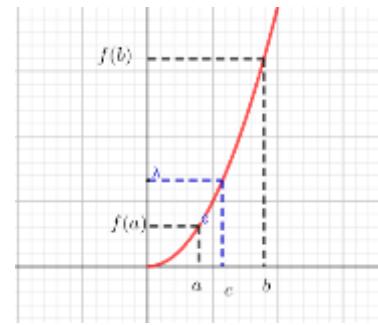
## 1.2 Cas $f$ strictement monotone.

### Théorème T.V.I (cas $f$ strictement monotone)

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur  $[a, b]$ .

Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe un et un seul

$c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$



#### Remarque :

L'expression " Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  il existe un et un seul  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = \lambda$ "

peut-être formulée comme :

" Pour tout  $\lambda$  compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$  l'équation  $f(x) = \lambda$  admet une solution unique dans  $[a, b]$

#### Corolaire1 (T.V.I) :

Soit  $f$  une fonction continue sur  $[a, b]$ .

Si  $f(a) \times f(b) < 0$  il existe au moins un  $c \in [a, b]$  tel que  $f(c) = 0$

#### Preuve :

$f(a) \times f(b) < 0$  veut dire que  $f(a)$  et  $f(b)$  ont des signes opposés donc 0 est compris entre  $f(a)$  et  $f(b)$

On prend  $\lambda = 0$  dans le théorème général des valeurs intermédiaires.

#### Corolaire2 (T.V.I) :

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur  $[a, b]$ .

Si  $f(a) \times f(b) < 0$  il existe un et un seul  $c$  dans  $[a, b]$  tel que  $f(c) = 0$

## 2) Applications :

### Exercice 1 :

1- Montrer que l'équation  $x^3 + x - 1 = 0$  admet une racine unique dans  $[0, 1]$

2- Montrer que l'équation  $x^3 + x - 1 = 0$  admet une racine unique dans  $\mathbb{R}$ .

## VI) FONCTIONS COMPOSEES ET FONCTIONS RECIPROQUES.

### 1) Composition de deux fonctions

#### 1.1 Rappelle

#### Activité :

Soit  $f(x) = 2x^2 + x$  et  $g(x) = \frac{1}{x}$

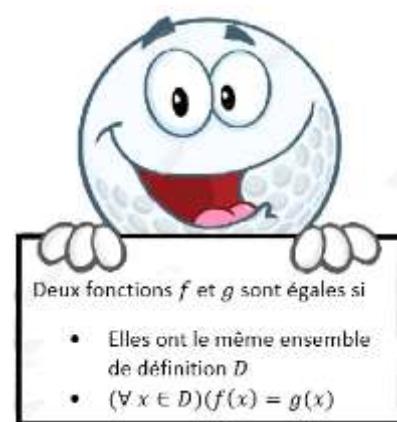
1- Déterminer :  $g(f(x))$ , déterminer les conditions d'existence de  $g(f(x))$ .

2- Déterminer :  $f(g(x))$ , déterminer les conditions d'existence de  $f(g(x))$ ,

La fonction qui à tout réel  $x$  associe  $g(f(x))$ , s'appelle la composition des fonction  $f$  et  $g$  dans cet ordre et se note  $gof$

La fonction qui à tout réel  $x$  associe  $f(g(x))$ , s'appelle la composition des fonction  $g$  et  $f$  dans cet ordre et se note  $fog$

3- A-t-on  $gof = fog$  ?



## Exercice :

Soient  $u(x) = \sqrt{x^2 - 1}$  et  $v(x) = 1 - 3x$

1- Déterminer  $uov$  et son ensemble de définition.

2- Déterminer  $vou$  et son ensemble de définition.

### 1.2 Composition et limite et continuité

## Théorème :

Soient  $f$  une fonction définie sur un intervalle  $I$  et  $g$  une fonction définie sur un intervalle  $J$  tels que  $f(I) \subset J$  et  $x_0$  un élément de  $I$ .

① Si  $f$  est continue en  $x_0$  et  $g$  continue en  $f(x_0)$  alors  $gof$  est continue en  $x_0$ .

② Si  $f$  est continue sur  $I$  et  $g$  continue sur  $f(I)$  alors  $gof$  est continue sur  $I$ .

## Exemples :

①  $g(x) = \sqrt{1 - x^2}$  est continue sur  $[-1, 1]$

②  $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{1+x^2}\right)$  est continue sur  $\mathbb{R}$

## Théorème :

Soit  $u$  une fonction définie sur un intervalle pointé de centre  $x_0$  telle que  $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = l$  ; si  $v$  est continue en  $l$  alors  $\lim_{x \rightarrow x_0} (vou)(x) = v(l)$

## Exercices

Déterminer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{\frac{x^2+x-2}{\sqrt{x+3}-2}}$
- $\lim_{x \rightarrow 0} \cos\left(\pi \frac{\sin 4x}{3x}\right)$

## 2) Fonctions réciproques

### Activité :

Soit  $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$

1- Montrer que pour tout  $y$  dans  $[0, +\infty[$ , l'équation  $f(y) = x$  admet une solution unique dans l'intervalle

$$J = ]0, 1]$$

2- Etudier la monotonie et la continuité de  $f$  sur  $\mathbb{R}$

On dit que la fonction  $f$  admet une fonction réciproque de  $J = [0, 1]$  vers  $I = [0, +\infty]$

Remarque :

$$\begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in F \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in E \end{cases}$$

On a :

$$(\forall x \in F)(f \circ f^{-1}(x) = x)$$

$$(\forall x \in E)(f^{-1} \circ f(x) = x)$$

Théorème :

Soit  $f$  une fonction définie continue et strictement monotone sur un intervalle  $I$ , On a  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  définie de  $J = f(I)$  vers  $I$ .

Exercice 1

Soit la fonction  $f(x) = 2x^2 + x + 1$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1- Déterminer  $J = f([0,1])$

2- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque de  $J$  vers  $[0,1]$  et déterminer  $f^{-1}(x)$  pour  $x$  dans  $J$

Exercice 2 :

Soit la fonction  $g(x) = x - 2\sqrt{x}$  définie sur  $\mathbb{R}$ .

1- Montrer que  $g$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$  puis déterminer  $J = g([1, +\infty[)$

2- Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque de  $J$  vers  $[1, +\infty[$  et déterminer  $g^{-1}(x)$  pour  $x$  dans  $J$

Propriété 1 :

Si  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  alors  $f^{-1}$  à la même monotonie sur  $J$  que celle de  $f$  sur  $I$ .

Preuve :

$$\begin{aligned} T_{f^{-1}}/J &= \frac{f^{-1}(x_1) - f^{-1}(x_2)}{x_1 - x_2} \\ &= \frac{y_1 - y_2}{f(x_1) - f(x_2)} \\ &= \frac{1}{T_{f/I}} \quad (T_{f/I} \neq 0 \text{ } f \text{ est strictement monotone}) \end{aligned}$$

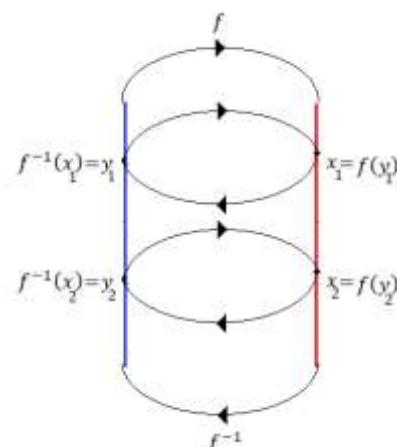
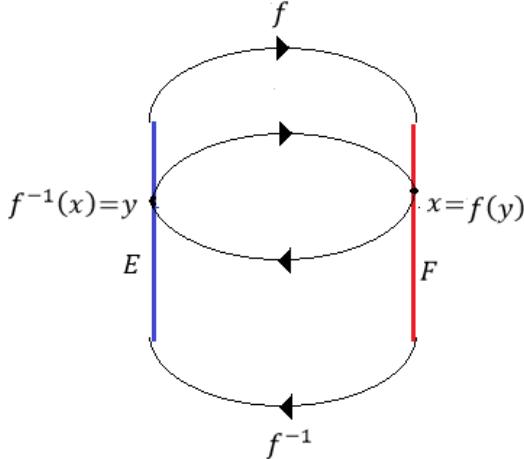
Donc le taux de  $f^{-1}$  sur  $J$  à le même signe que le taux de  $f$  sur  $I$

Et on conclut.

Propriété 2 :

Si  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$  de  $J = f(I)$  vers  $I$  alors  $C_{f^{-1}}$  et  $C_f$  sont symétriques par rapport à :

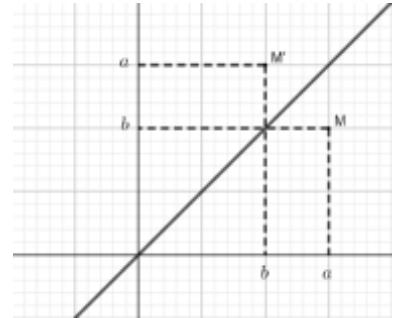
(Δ)  $y = x$



## Rappelles :

$$\textcircled{1} M(x, y) \in C_f \Leftrightarrow \begin{cases} x \in D_f \\ y = f(x) \end{cases}$$

\textcircled{2} Dans un repère orthogonal si on a un point  $M(a, b)$  son symétrique par rapport à la droite  $(\Delta) y = x$  est le point  $M'(b, a)$ .



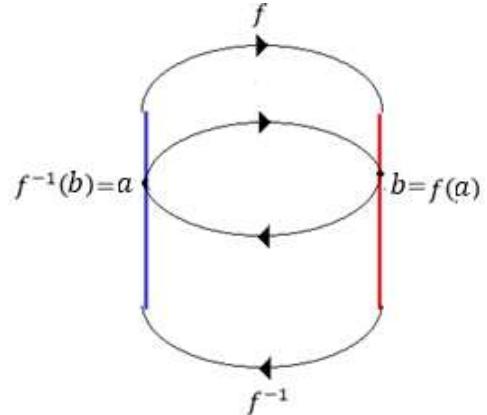
## Preuve d'une propriété :

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur un intervalle  $I$ ,  $f^{-1}$  sa fonction réciproque définie de  $J = f(I)$  vers  $I$ .

$C_f$  et  $C_{f^{-1}}$  sont les courbes respectives de  $f$  et de  $f^{-1}$ .

Soit  $M(a, f(a))$  un point de la courbe  $C_f$  son symétrique par rapport à la droite  $(\Delta) y = x$  est le point  $M'(f(a), a)$ .

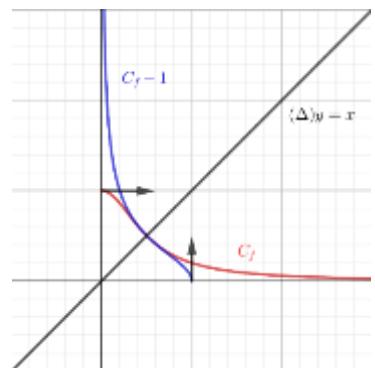
Or :  $\begin{cases} f(a) = b \\ a = f^{-1}(b) \end{cases}$  donc  $M'(b, f^{-1}(b))$  d'où  $M' \in C_{f^{-1}}$



## Propriété :

Soit  $f$  une fonction continue strictement monotone sur un intervalle  $I$ ,  $f^{-1}$  sa fonction réciproque définie de  $J = f(I)$  vers  $I$ .  $C_f$  et  $C_{f^{-1}}$  sont symétriques par rapport à la droite  $(\Delta) y = x$

A remarquer que la symétrie des deux courbes concerne toutes leurs composantes ; les asymptotes ; les tangentes et demi-tangentes...



## 3) La fonction racine $n$ – éme

### 3.1 Définition et règles de calculs

#### Propriété et définition :

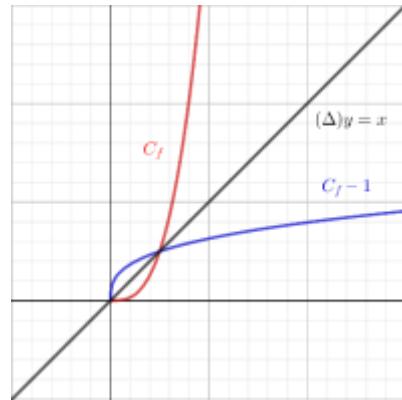
Soit  $n$  un élément de  $\mathbb{N}^*$  ; la fonction  $u: x \mapsto x^n$  est une fonction continue strictement croissante sur  $\mathbb{R}^+$  elle admet donc une fonction réciproque  $u^{-1}$  de  $u(\mathbb{R}^+) = \mathbb{R}^+$  vers  $\mathbb{R}^+$ . La fonction réciproque  $u^{-1}$  s'appelle la fonction racine  $n$  – éme et se note  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$

#### Conséquence de la définition :

- La fonction  $\sqrt[n]{\phantom{x}}$  est définie sur  $\mathbb{R}^+$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x} \geq 0)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall y \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x} = y \Leftrightarrow y^n = x)$

- La fonction  $\sqrt[n]{\cdot}$  est continue sur  $\mathbb{R}^+$  strictement croissante.
  - $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y)$
  - $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x} \geq a \Leftrightarrow x \geq a^n)$
  - $(\forall a \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x} \leq a \Leftrightarrow 0 \leq x \leq a^n)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{x})^n = \sqrt[n]{x^n} = x$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\forall p \in \mathbb{N}) (\sqrt[n]{x})^p = \sqrt[n]{x^p}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- Si  $\lim_{x \rightarrow **} u(x) = +\infty$  alors  $\lim_{x \rightarrow **} \sqrt[n]{u(x)} = +\infty$
- Si  $\lim_{x \rightarrow **} u(x) = l \geq 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow **} \sqrt[n]{u(x)} = \sqrt[n]{l}$

## La courbe de la fonction $\sqrt[n]{\cdot}$



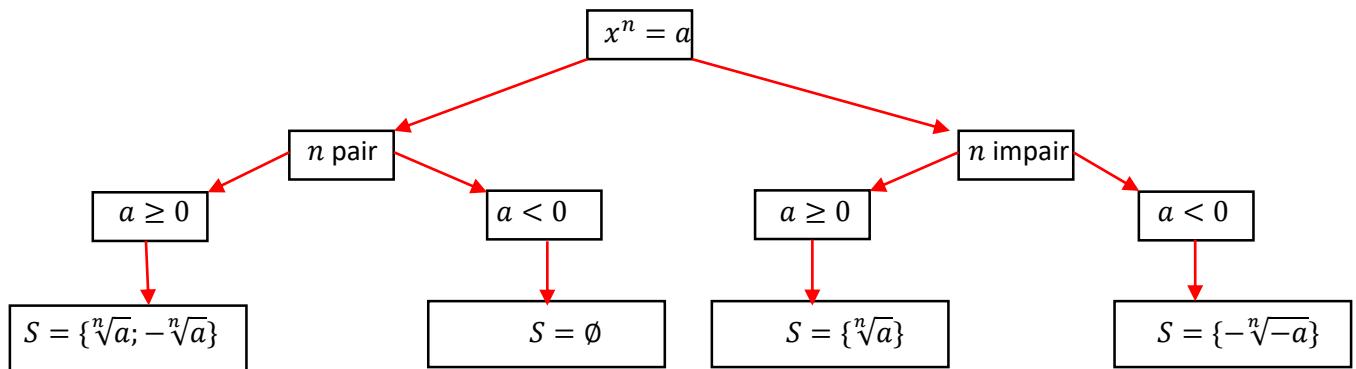
## Règle de calcul :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y})$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+}) \left( \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \right)$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \left( \sqrt[p]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[np]{x} \right)$  (à prouver)
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\forall p \in \mathbb{N}^*) \left( \sqrt[n]{x} = \sqrt[np]{x^p} \right)$  (à prouver)

## Remarque :

- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[2]{x} = \sqrt{x})$
- $(\forall x \in \mathbb{R}^+) (\sqrt[1]{x} = x)$

## L'équation $x^n = a$



## Exercices d'applications :

### Exercice 1 :

- Résoudre dans  $\mathbb{R}$ :  $x^4 = 16$
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$ :  $(x - 1)^3 = -27$

### Exercice 2 :

- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation:  $\sqrt[3]{x} - x = 0$
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation:  $\sqrt[3]{x} - 5\sqrt[6]{x} + 6 = 0$
- Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'inéquation:  $\sqrt{x-1} - \sqrt[3]{x-2} > 1$ .

## 3.2 L'expression conjuguée et ses applications

### Ordre 3 :

On sait que  $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$  et  $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Il en résulte :  $a - b = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + ab + b^2}$  et  $a + b = \frac{a^3 + b^3}{a^2 - ab + b^2}$

Par suite :

$$\begin{aligned} (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+}) \left( \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \right) \\ (\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+}) \left( \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \frac{x + y}{\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{xy} + \sqrt[3]{y^2}} \right) \end{aligned}$$

### Applications :

① Rendre le dénominateur rationnel :

$$a = \frac{3\sqrt{2}}{\sqrt[3]{2}-2} \quad b = \frac{1}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}$$

② Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{20x^2+7}-3}{x^2+x-2} \quad \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt[3]{3x-4}-\sqrt{x}}{x-4}$$

### D'ordre 4 :

On sait que :  $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$

Il en résulte que :  $a - b = \frac{a^4 - b^4}{a^3 + a^2b + ab^2 + b^3}$

Et par suite :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+)(\forall y \in \mathbb{R}^{*+}) \left( \sqrt[4]{x} - \sqrt[4]{y} = \frac{x - y}{\sqrt[4]{x^3} + \sqrt[4]{x^2y} + \sqrt[4]{xy^2} + \sqrt[4]{y^3}} \right)$$

A remarquer qu'on ne peut pas factoriser :  $a^4 + b^4$

### Applications :

Déterminer les limites suivantes :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[4]{20x-4}-2}{2x^2+x-3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{2x+1}-1}{\sqrt[3]{2x+8}-2}$$

## 4) Puissance rationnelle :

### 4.1 Puissance entier

#### Rappelle :

Soit  $x$  un réel et  $n$  un entier naturel non nul on a :  $x^n = \underbrace{x \times x \times \dots \times x}_{n \text{ fois}}$  et  $x^0 = 1$  ( $x \neq 0$ )

Pour  $x \neq 0$  on a  $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$

### 4.2 Puissance rationnelle

#### Propriété :

Pour tout réel  $x \geq 0$  et pour tout entier non nul  $q$  on pose :  $\sqrt[q]{x} = x^{\left(\frac{1}{q}\right)}$

## Preuve : (en exercice)

### Définition :

Soit  $x$  un réel positif et  $r$  un rationnel ( $r \in \mathbb{Q}$ ) ;  $r = \frac{p}{q}$  où  $p \in \mathbb{Z}$  et  $q \in \mathbb{N}^*$  on pose :

$$x^r = x^{\left(\frac{p}{q}\right)} = \sqrt[q]{x^p} = \left(\sqrt[q]{x}\right)^p$$

### Propriétés

Soit  $x$  et  $y$  deux réels positifs,  $r$  et  $r'$  des rationnels on a :

1.	$x^{r+r'} = x^r \times x^{r'}$
2.	$x^{r \times r'} = (x^r)^{r'} = (x^{r'})^r$
3.	$x^{-r'} = \frac{1}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
4.	$x^{r-r'} = \frac{x^r}{x^{r'}} \quad (x \neq 0)$
5.	$(xy)^r = x^r y^r$
6.	$\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

### Exercice 1 :

Démontrer 1 et 2

### Exercice 2 :

Comparer les nombres  $a = \sqrt[3]{5}$  et  $b = \sqrt[4]{20}$

### Application aux calculs des limites.

Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[5]{2x^2 + 3x} - \sqrt[4]{3x^3 + x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{8x^2 + 3x} - 2\sqrt[3]{x^2 - x^2}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[4]{x-1}-1}{\sqrt[3]{x+1+x}}$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[p]{x^q + 1} - \sqrt[q]{x^p + 1}$  (discuter suivant les valeurs de  $p$  et  $q$ )