Année scolaire : 2022 – 2023	Solutions examen 2023 SN	AGOUZAL 2 BPCF-2 BSVTF

Exercice 1 : (2023 SN) (3pts)

On a $B(2;1;2)$; $C(2;5;0)$; $A(0;1;4)$.

1) a) Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\-4\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&4\\-2&-4\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}2&2\\-2&-4\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}2&2\\0&4\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=8\vec{i}+4\vec{j}+8\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$

b) En déduire l'aire de triangle ABC et la distance $d(B,(AC))$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|$ or $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left\|4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})\right\|=\frac{4}{2}\left\|2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}\right\|$

Donc $S_{ABC}=2\sqrt{2^2+1^2+2^2}=2\sqrt{9}$

D'où $S_{ABC}=6$

On a $d(B,(AC))=\dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right\|}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}=\dfrac{4\sqrt{2^2+1^2+2^2}}{\sqrt{2^2+4^2+(-4)^2}}$

Donc $d(B,(AC))=\dfrac{4\sqrt{9}}{\sqrt{36}}=2$ d'où $d(B,(AC))=2$

2) Soit D le milieu du segment $[AC]$

a) Vérifier que : $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

D est le milieu du segment $[AC]$

Donc $D\left(\frac{0+2}{2};\frac{1+5}{2};\frac{4+0}{2}\right)$ donc $D(1;3;2)$

Or $\Omega(3;4;4)$ donc $\overrightarrow{D\Omega}(2;1;2)$ donc $\overrightarrow{D\Omega}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

Or $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4(2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k})$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=4\overrightarrow{D\Omega}$

D'où $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$

b) En déduire que $d(\Omega,(ABC))=3$

On a $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ est normal au plan (ABC).

Et puisque $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$ donc $\overrightarrow{D\Omega}$ est normal au plan (ABC) donc $(D\Omega)\perp(ABC)$

Or D est le milieu du segment $[AC]$ donc $D\in(ABC)$

Donc D est la projection orthogonal de Ω sur (ABC)

Donc $d(\Omega,(ABC))=D\Omega$ or $\overrightarrow{D\Omega}=2\vec{i}+\vec{j}+2\vec{k}$

Donc $D\Omega=\sqrt{2^2+1^2+2^2}=\sqrt{9}=3$

D'où $d(\Omega,(ABC))=3$

3) Soit (S) la sphère d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-6x-8y-8z+32=0$$

a) Déterminer le centre et le rayon de (S).

$x^2+y^2+z^2-6x-8y-8z+32=0$

$a=\frac{-6}{-2}$; $b=\frac{-8}{-2}$; $c=\frac{-8}{-2}$; $d=32$

Donc $a=3$; $b=4$; $c=4$; $d=32$

$a^2+b^2+c^2-d=3^2+4^2+4^2-32=9$

Donc le centre de (S) est $\Omega(3;4;4)$ et $R=\sqrt{9}=3$

D'où $\Omega(3;4;4)$ et rayon $R=3$

b) Montrer que le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en un point que l'on déterminera.

On a $d(\Omega,(ABC))=3$ et $R=3$

Donc le plan (ABC) est tangent à la sphère (S).
Donc (ABC) coupe la sphère (S) en un seule point.

Or $D\Omega=3$ et $R=3$ donc $D\in(S)$ or $D\in(ABC)$

$(ABC)\cap(S)=\{D\}$

D'où le plan (ABC) est tangent à la sphère (S) en D.

4) soit (Q_1) et (Q_2) les deux plans parallèles à (ABC).Tels que chacun d'eux coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$.
Déterminer une équation cartésienne pour chacun des deux plans (Q_1) et (Q_2).

Soit (Q) un plan parallèle à (ABC) tel que :

(Q) coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$.

On a $\overrightarrow{D\Omega}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right)$; $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ normal à (ABC)

(Q) est parallèle à (ABC) et on a $\overrightarrow{D\Omega}$ est normal au plan (ABC) donc $\overrightarrow{D\Omega}$ est normal au plan (Q)

Soit $M(x;y;z)\in(Q)$

$\overrightarrow{D\Omega}(2;1;2)$ est normal à (Q)

$(Q):2x+y+2z+d=0$

(Q) coupe (S) suivant un cercle de rayon $\sqrt{5}$.

$\sqrt{5}=\sqrt{3^2-\left(d(\Omega;(Q))\right)^2}\Leftrightarrow 3^2-\left(d(\Omega;(Q))\right)^2=5$

$\left(d(\Omega;(Q))\right)^2=9-5\Leftrightarrow\left(d(\Omega;(Q))\right)^2=4$

$d(\Omega;(Q))=2$ car $d(\Omega;(Q))>0$

On sait que $d(\Omega;(Q))>0$

$(Q):2x+y+2z+d=0$; $\Omega(3;4;4)$

$$d(\Omega,(Q))=\frac{|2\times3+4+2\times4+d|}{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}=\frac{|18+d|}{\sqrt{9}}$$

$d(\Omega,(Q))=\frac{|18+d|}{3}$ or $d(\Omega;(Q))=2$

Donc $\frac{|18+d|}{3}=2\Leftrightarrow|18+d|=6$

$\Leftrightarrow 18+d=6$ ou $18+d=-6\Leftrightarrow d=-12$ ou $d=-24$

D'où $(Q_1):2x+y+2z-12=0$ et

$(Q_2):2x+y+2z-24=0$

<u>Exercice 2</u> :((2023 SN) (3pts)

3) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$; $b=1+\sqrt{2}+i$ $c=\overline{b}$ et $d=2i$

1) Ecrire le nombre complexe a sous forme trigonométrique.

$a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$

$|u|=|\sqrt{2}+i\sqrt{2}|=\sqrt{2+2}=2$

$$a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}=2(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2})=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$$

D'où $a=2(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$

2) a) Vérifier que : $b-d=c$

$b-d=1+\sqrt{2}+i-2i\Leftrightarrow b-d=1+\sqrt{2}-i$

Or $c=\overline{b}$ et $\overline{b}=1+\sqrt{2}-i$

Donc $b-d=c$

b) Montrer que : $(\sqrt{2}+1)(b-a)=b-d$ et déduire que les points A, B et D sont alignés.

$(\sqrt{2}+1)(b-a)=(\sqrt{2}+1)(1+\sqrt{2}+i-\sqrt{2}-i\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow(\sqrt{2}+1)(b-a)=(\sqrt{2}+1)(1+i-i\sqrt{2})$

$\Leftrightarrow(\sqrt{2}+1)(b-a)=\sqrt{2}+1+i\sqrt{2}+i-2i-i\sqrt{2}$

$\Leftrightarrow(\sqrt{2}+1)(b-a)=\sqrt{2}+1-i$ or $c=\overline{b}$

Donc $(\sqrt{2}+1)(b-a)=c$ or $c=b-d$

D'où $(\sqrt{2}+1)(b-a)=b-d$

On a $(\sqrt{2}+1)(b-a)=b-d$

Donc $\frac{b-d}{b-a}=(\sqrt{2}+1)$ or $(\sqrt{2}+1)\in\mathbb{R}$

Donc $\frac{b-d}{b-a}\in\mathbb{R}$ donc les points A, B et D sont alignés

3) a) Vérifier que : $ac=2b$

$ac=(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(1+\sqrt{2}-i)$

Donc

$ac=(\sqrt{2}+i\sqrt{2})(\sqrt{2}+2-i\sqrt{2}+i\sqrt{2}+2i+\sqrt{2})$

$ac=2\sqrt{2}+2+2i\Leftrightarrow ac=2(\sqrt{2}+1+i)$

D'où $ac=2b$

b) En déduire que : $2\arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

On a $2b=ac$ donc $\arg(b)\equiv\arg(ac)[2\pi]$

Donc $\arg(b)\equiv\arg(a)+\arg(c)[2\pi]$ or $c=\overline{b}$

Donc $\arg(c)\equiv\arg(\overline{b})[2\pi]$ et $\arg(\overline{b})\equiv-\arg(b)[2\pi]$

Donc $\arg(b)\equiv\arg(a)-\arg(b)[2\pi]$

Donc $2\arg(b)\equiv\arg(a)[2\pi]$ or $\arg(a)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

D'où $2\arg(b)\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

4) Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{4}$ et qui transforme chaque point M du plan d'affixe z en un point M′ d'affixe z′ .

a) Montrer que : $z'=\frac{1}{2}az$

$R(M)=M'\Leftrightarrow z'-0=e^{i\frac{\pi}{4}}(z-0)$

$\Leftrightarrow z'=e^{i\frac{\pi}{4}}z$ on a $a=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ donc $\frac{1}{2}a=e^{i\frac{\pi}{4}}$

D'où $z'=\frac{1}{2}az$

b) En déduire que $R(C)=B$ et $R(A)=D$

On a $2b=ac\Leftrightarrow b=\frac{1}{2}ac\Leftrightarrow R(C)=B$

$R(A)=D\Leftrightarrow d=\frac{1}{2}a\times a\Leftrightarrow d=\frac{1}{2}a^2$

On a $a=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ donc $a^2=2(1+i)^2$

$a^2=2\times2i\Leftrightarrow\frac{1}{2}a^2=2i\Leftrightarrow\frac{1}{2}a^2=d$

D'où $R(A)=D$

c) Montrer que : $\frac{b-a}{c-a}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)a$, puis en déduire une mesure de l'angle $(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB})$.

$\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\mathbf{a}$? On a $\mathbf{R(C)}=\mathbf{B}\Leftrightarrow \mathbf{b}=\frac{1}{2}\mathbf{ac}$

$$\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\frac{\frac{1}{2}\mathbf{ac}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}\Leftrightarrow\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\frac{1}{2}\mathbf{a}\frac{\mathbf{c}-2}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}\Leftrightarrow\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\frac{1}{2}\mathbf{a}\frac{1+\sqrt{2}-\mathbf{i}-2}{1+\sqrt{2}-\mathbf{i}-\sqrt{2}-\mathbf{i}\sqrt{2}}\Leftrightarrow\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\frac{1}{2}\mathbf{a}\frac{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}(1+\sqrt{2})}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\frac{1}{2}\mathbf{a}\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}-1}\times\frac{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}{1-\mathbf{i}(1+\sqrt{2})}\Leftrightarrow\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\mathbf{a}\frac{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}(1+\sqrt{2})(\sqrt{2}-1)}$$

$$\Leftrightarrow\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\mathbf{a}\frac{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}{\sqrt{2}-1-\mathbf{i}}$$

D'où $\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\mathbf{a}$

On a $\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)\mathbf{a}$ et $\left(\frac{\sqrt{2}-1}{2}\right)>0$ donc $\arg\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}\equiv\arg\mathbf{a}[2\pi]$ or $\arg(\mathbf{a})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

On a $(\overrightarrow{\mathbf{AC}};\overrightarrow{\mathbf{AB}})\equiv\arg\frac{\mathbf{b}-\mathbf{a}}{\mathbf{c}-\mathbf{a}}[2\pi]$

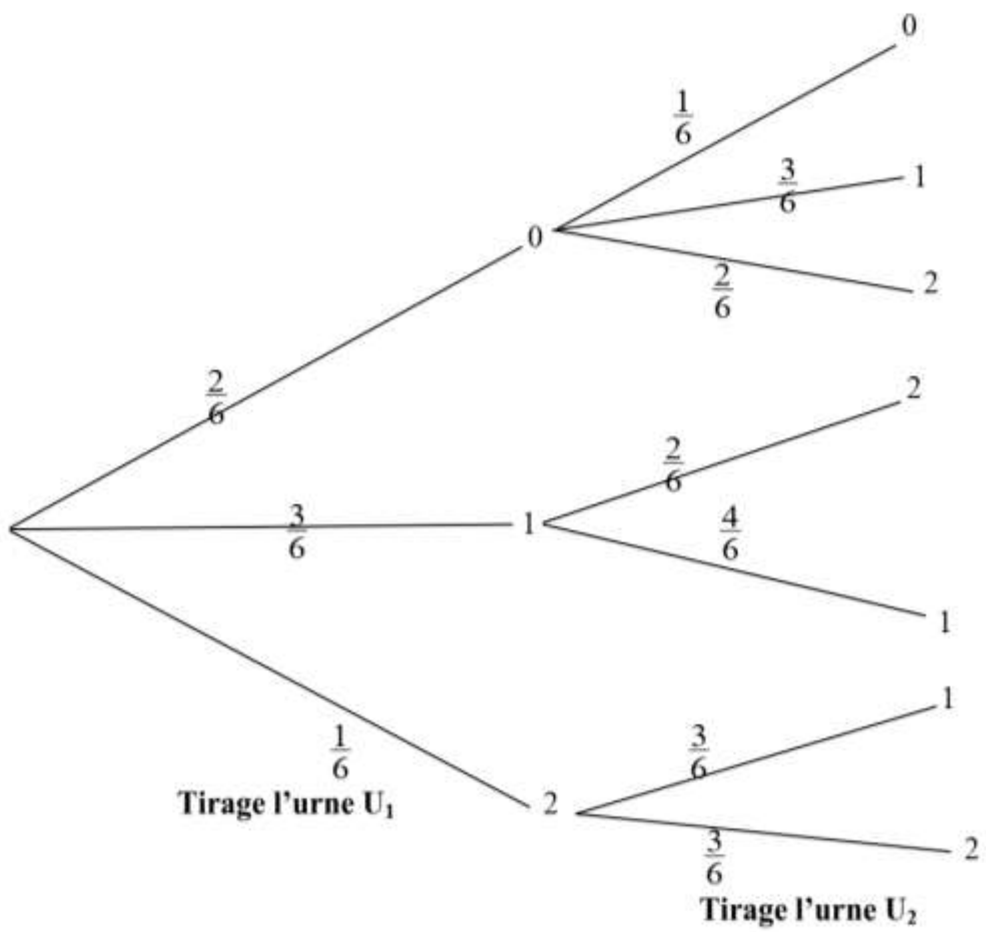
D'où $(\overrightarrow{\mathbf{AC}};\overrightarrow{\mathbf{AB}})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

Exercice 3:((2023 SN) (3pts)

Une urne U_1 contient six boules portant les nombres 0 ; 0 ; 1 ; 1 ; 1 ;2 et Une urne U_2 contient cinq boules portant les nombres 1 ;1 ;1 ; 2 ; 2.

On tire une boule de l'urne U_1 et on note le nombre **a** qu'elle porte, puis on la met dans l'urne U_2, ensuite on tire une boule de l'urne U_2 et on note le nombre **b** qu'elle porte.

U_1 : 2 (0) ; 3 (1) ; 1 (2) U_2 : 3 (1) ; 2 (2) ; **a**

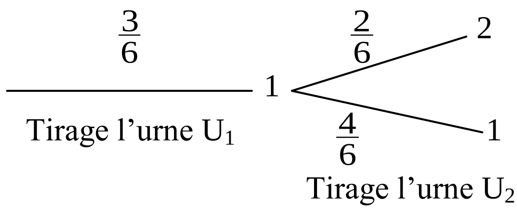


AHMED AGOUZAL

U_1 : 2 (0) ; 3 (1) ; 1 (2)

U_2 : 3 (1) ; 2 (2)

1) a) Calculer $P(A)$; la probabilité de l'événement A. A ″ la boule tirée de l'urne U_1 porte le nombre1″

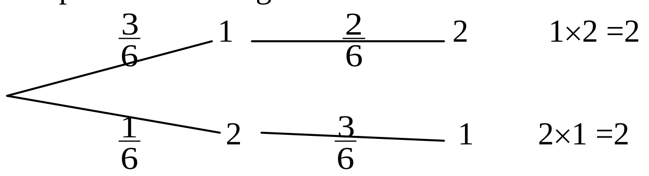


$$\mathbf{P(A)}=\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}+\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{3}{6}\times\frac{6}{6}$$

D'où $\mathbf{P(A)}=\frac{1}{2}$

b) Montrer que $\mathbf{P(B)}=\frac{1}{4}$ (on peut utiliser l'arbre des possibilités).

B ″ le produit ab est égal à 2 ″



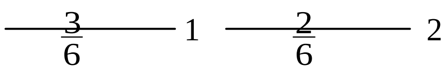
$$\mathbf{P(B)}=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}+\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{9}{36}$$

$$\mathbf{P(B)}=\frac{1}{4}$$

2) Calculer $\mathbf{P(A/B)}$; la probabilité de l'événement A Sachant que l'événement B est réalisé.

$$\mathbf{P(A/B)}=\frac{\mathbf{P(A\cap B)}}{\mathbf{P(B)}}$$

$\mathbf{(A\cap B)}$ ″ a = 1 et b =2 ″ ab = 2



$$\mathbf{P(A\cap B)}=\frac{3}{6}\times\frac{2}{6}=\frac{1}{6}$$

$$\mathbf{P(A/B)}=\frac{\mathbf{P(A\cap B)}}{\mathbf{P(B)}}=\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}\text{ donc }\mathbf{P(A/B)}=\frac{4}{6}$$

D'où $\mathbf{P(A/B)}=\frac{2}{3}$

3) Soit X la variable aléatoire qui associe à chaque résultat de l'expérience, le produit ab.

a) Montrer que $\mathbf{P(X=0)}=\frac{1}{3}$; 0×2 ou 0×1 ou 0×0

$$\mathbf{P(X=0)}=\frac{2}{6}\left(\frac{1}{6}+\frac{2}{6}+\frac{3}{6}\right)\quad\text{donc }\mathbf{P(X=0)}=\frac{1}{3}$$

b) Donner la loi de probabilité de X (Remarquer que les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 et 4)

$$\mathbf{P(X=1)}=\frac{3}{6}\times\frac{4}{6}=\frac{1}{3}$$

$$\mathbf{P(X=2)}=\mathbf{P(B)}=\frac{1}{4}$$

$$\mathbf{P(X=4)}=\frac{1}{6}\times\frac{3}{6}=\frac{1}{12}$$

k	0	1	2	4
P(X=k)	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{\frac{1}{3}}$	$\mathbf{\frac{1}{4}}$	$\mathbf{\frac{1}{12}}$

(On a $\mathbf{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}=1}$)

c) On considère les événements :

N ″ le produit ab est pair non nul″ ab =2 ou ab = 4

$$\mathbf{P(N)}=\mathbf{P(X=2)}+\mathbf{P(X=4)}=\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

$$\mathbf{P(N)}=\frac{1}{3}$$

M ″ le produit ab est égal à 1 ″ ab = 1×1

$$\mathbf{P(M)}=\mathbf{P(X=1)}=\frac{1}{3}\text{ donc }\mathbf{P(M)}=\frac{1}{3}$$

Montrer que les événements M et N sont équiprobables.

On a $\mathbf{P(M)}=\frac{1}{3}$ et $\mathbf{P(N)}=\frac{1}{3}$ donc $\mathbf{P(M)}=\mathbf{P(N)}$

D'où les événements M et N sont équiprobables.

<u>Problème :</u> (2023 SN) (11pts)

On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par

$$\mathbf{f(x)}=2-\frac{2}{\mathbf{x}}+(1-\ln\mathbf{x})^2$$

1) a) Vérifier que pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$\mathbf{f(x)}=\frac{3\mathbf{x}-2-2\mathbf{x}\ln\mathbf{x}+\mathbf{x}(\ln\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}}$$

On a $\mathbf{f(x)}=2-\frac{2}{\mathbf{x}}+(1-\ln\mathbf{x})^2$

$$\mathbf{f(x)}=\frac{2\mathbf{x}-2+\mathbf{x}(1-\ln\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}}$$

$$\mathbf{f(x)}=\frac{2\mathbf{x}-2+\mathbf{x}-2\mathbf{x}\ln\mathbf{x}+\mathbf{x}(\ln\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}}$$

D'où $\mathbf{f(x)}=\frac{3\mathbf{x}-2-2\mathbf{x}\ln\mathbf{x}+\mathbf{x}(\ln\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}}$

b) Montrer que $\lim\limits_{\mathbf{x}\to0^+}\mathrm{x}(\ln\mathbf{x})^2=0$ **et que**

$\lim\limits_{\mathbf{x}\to+\infty}\frac{(\ln\mathbf{x})^2}{\mathbf{x}}=0$ **(on peut poser $\mathbf{t}=\sqrt{\mathbf{x}}$)**

On a $\mathbf{t}=\sqrt{\mathbf{x}}\Leftrightarrow\mathbf{x}=\mathbf{t}^2$ $\quad\mathbf{x}\to0^+\Leftrightarrow\mathbf{t}\to0^+$

$$\lim_{\mathbf{x}\to0^+}\mathrm{x}(\ln\mathbf{x})^2=\lim_{\mathbf{t}\to0^+}\mathbf{t}^2(\ln\mathbf{t}^2)^2=\lim_{\mathbf{t}\to0^+}(\mathrm{t}\,2\ln\mathbf{t})^2$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to0^+}\mathrm{x}(\ln\mathbf{x})^2=\lim_{\mathbf{t}\to0^+}(2\mathbf{t}\ln\mathbf{t})^2=0$$

Car $\lim\limits_{\mathbf{t}\to0^+}\mathbf{t}\ln\mathbf{t}=0$ D'où $\lim\limits_{\mathbf{x}\to0^+}\mathrm{x}(\ln\mathbf{x})^2=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$?

On a $t=\sqrt{x} \Leftrightarrow x=t^2$ $\quad x\to+\infty \Leftrightarrow t\to+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=\lim_{t\to+\infty}\frac{(\ln t^2)^2}{t^2}=\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{2\ln t}{t}\right)^2=0$$

Car $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t}=0$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

c) Déduire que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ **puis donner une interprétation géométriquement du résultat.**

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$$

On a $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln x=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x(\ln x)^2=0$

$\lim\limits_{x\to0^+} 3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2=-2$ et $\lim\limits_{x\to0^+} x=0^+$

D'où $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ donc la courbe (C_f) admet une asymptote verticale d'équation $x=0$.

d) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$**, puis montrer que la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.**

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty} 2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2$$

puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} 2-\frac{2}{x}=2$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\ln x)^2=+\infty$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$

D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}f(x)$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\,\frac{3x-2-2x\ln x+x(\ln x)^2}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2\left(\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-2\frac{\ln x}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}\right)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}-2\frac{\ln x}{x}+\frac{(\ln x)^2}{x}=0$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(\ln x)^2}{x}=0$

Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ la courbe (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$.

2) Montrer que pour tout x de $]0;+\infty[$:

$$f'(x)=\frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}$$

On a $f(x)=2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2$

$$f'(x)=-\frac{-2}{x^2}+2(1-\ln x)(1-\ln x)'$$

$$f'(x)=\frac{2}{x^2}+2(1-\ln x)\left(-\frac{1}{x}\right)$$

$$f'(x)=\frac{2}{x^2}\left(1-x(1-\ln x)\right)$$

$$f'(x)=\frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}\qquad \forall x\in]0;+\infty[$$

3) En exploitant le tableau de variation ci-dessous, de la fonction dérivée f ′ de f sur $]0;+\infty[$

x	0		1		β		+∞
f′(x)	+∞	↘	0	↗	f ′(β)	↘	0

a) Prouver que f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f.

On a $f'(x)=\frac{2(1-x+x\ln x)}{x^2}\quad \forall x\in]0;+\infty[$

$x\to x\ln x$, $x\to 1-x$ et $x\to x^2$ sont continues sur $]0;+\infty[$ donc $x\to 1-x+x\ln x$ est continue sur $]0;+\infty[$

Donc f' est continue sur $]0;+\infty[$ car c'est le quotient de deux fonctions continues sur $]0;+\infty[$.

$f'(]0;1])=[0;+\infty[$ donc $f'(x)\ge 0\quad \forall x\in]0;1]$

et $f'([1;\beta])=[0;f'(\beta)]$ donc $f'(x)\ge 0\quad \forall x\in[1;\beta]$

$f'([\beta;+\infty[)=]0;f'(\beta)]$ donc $f'(x)>0\quad \forall x\in[\beta;+\infty[$

Donc $f'(x)\ge 0\quad \forall x\in]0;+\infty[$

D'où f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

x	0	1	+∞
f′(x)		+	
f(x)	−∞	↗	+∞

b) Donner le tableau de signe de la dérivée seconde f'' de la fonction f sur $]0;+\infty[$

On a $\mathbf{f'}$ est décroissante sur $]0;1]$

Donc $\forall \mathbf{x} \in]0;1] \quad \mathbf{f}''(x) \le 0$

On a $\mathbf{f'}$ est croissante sur $[1;\beta]$

Donc $\forall \mathbf{x} \in [1;\beta] \quad \mathbf{f}''(x) \ge 0$

On a $\mathbf{f'}$ est décroissante sur $[\beta;+\infty[$

Donc $\forall \mathbf{x} \in [\beta;+\infty[\quad \mathbf{f}''(x) \le 0$

x	0		1		β		$+\infty$
$f''(x)$	‖	–	0	+	0	–	

c) Déduire la concavité de la courbe (C_f) en précisant les abscisses de ses deux points d'inflexions.

$\forall \mathbf{x} \in]0;1] \cup [\beta;+\infty[\quad \mathbf{f}''(x) \le 0$ la courbe (C_f) est concave sur les intervalles $]0;1]$ et $[\beta;+\infty[$

$\forall \mathbf{x} \in [1;\beta] \quad \mathbf{f}''(x) \ge 0$ la courbe (C_f) est convexe sur l'intervalle $[1;\beta]$

la courbe (C_f) change de concavité en 1 et en β

La courbe (C_f) admet deux points d'inflexions d'abscisses 1 et β.

4) a) A partir de la courbe (C_g) déterminer le signe de la fonction g sur $]0;+\infty[$.

la courbe (C_g) est au-dessus de l'axe des abscisses sur $[\alpha;1]$ donc $\mathbf{g}(x) \ge 0 \quad \forall \mathbf{x} \in [\alpha;1]$

la courbe (C_g) est en dessous de l'axe des abscisses sur les intervalles $]0;\alpha]$ et $[1;+\infty[$

Donc $\mathbf{g}(x) \le 0 \quad \forall \mathbf{x} \in]0;\alpha] \cup [1;+\infty[$

x	0		α		1		$+\infty$
g (x)	|	–	0	+	0	–	

b) Déduire que la droite (Δ) est en dessous de la courbe (C_f) sur l'intervalle $[\alpha;1]$ et au-dessus de la courbe (C_f) sur les intervalles $]0;\alpha[$ et $[1;+\infty[$

On a $\mathbf{g} : \mathbf{x} \to \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x}$

$\forall \mathbf{x} \in [\alpha;1] \quad \mathbf{g}(x) \ge 0 \Leftrightarrow \mathbf{f}(x) - x \ge 0 \Leftrightarrow \mathbf{f}(x) \ge \mathbf{x}$

$\forall \mathbf{x} \in [\alpha;1] \quad x \le \mathbf{f}(\mathbf{x}) \qquad (\Delta) : y = x$

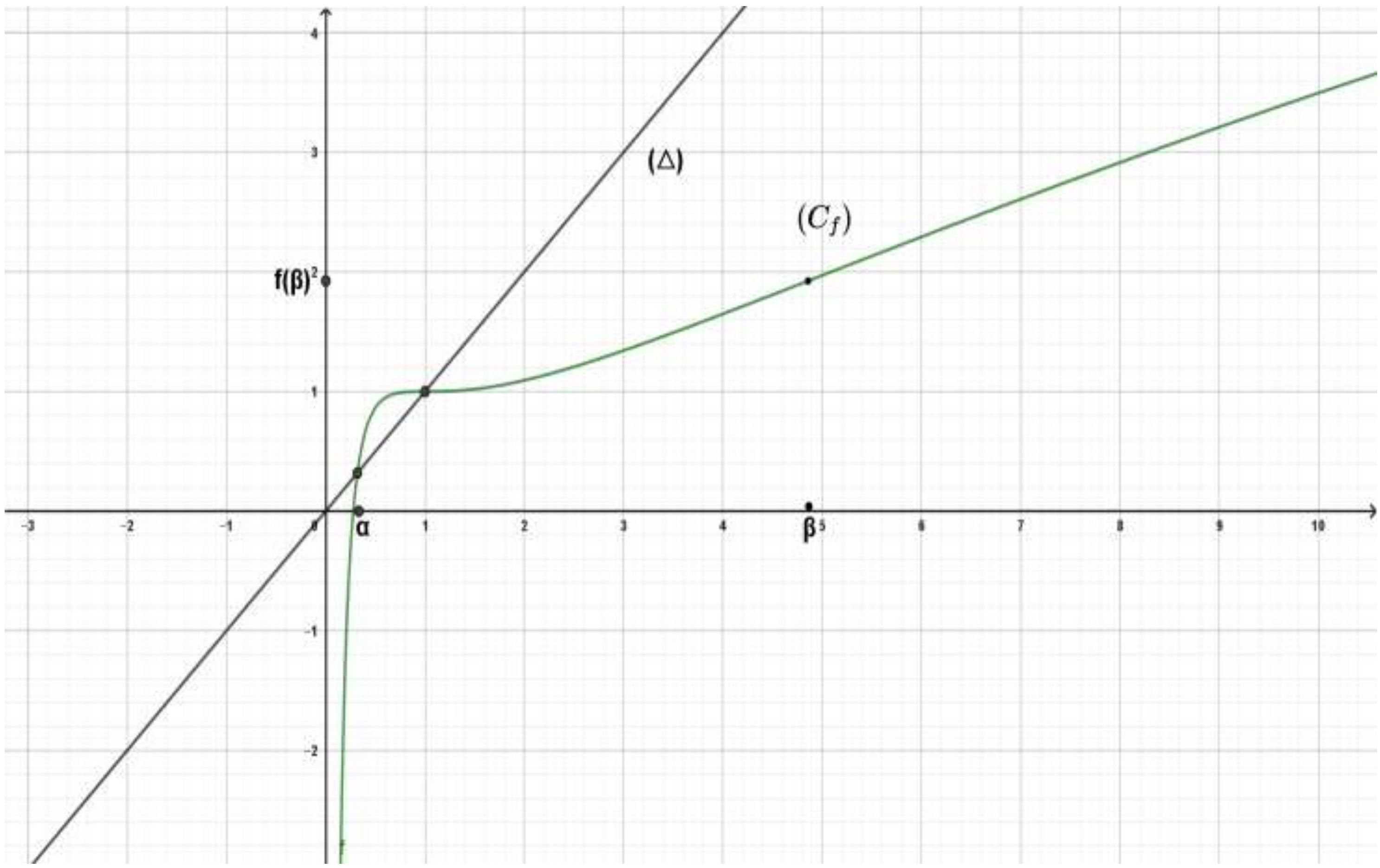
La droite (Δ) est en dessous de la courbe (C_f) sur l'intervalle $[\alpha;1]$

$\forall \mathbf{x} \in]0;\alpha] \cup [1;+\infty[\quad \mathbf{g}(x) \le 0 \Leftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{x} \le 0$

$\forall \mathbf{x} \in]0;\alpha] \cup [1;+\infty[\quad \mathbf{x} \ge \mathbf{f}(\mathbf{x})$

La droite (Δ) est au-dessus de la courbe (C_f) sur les intervalles $]0;\alpha[$ et $[1;+\infty[$

5) Construire la courbe (C_f) et la droite (Δ) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$ (On prend $\alpha \approx 0,3$, $\beta \approx 4,9$; $f(\beta) \approx 1,9$)



AHMED AGOUZAL

6) a) Vérifier que la fonction $x \to 2x - x\ln x$ est une primitive de la fonction $x \to 1-\ln x$ sur $[\alpha;1]$

On pose $\mathbf{u}(x) = 2x - x\ln x \quad \forall x \in [\alpha;1]$ donc $\mathbf{u}'(x) = 2-(\ln x+1) \quad \forall x \in [\alpha;1]$

$\mathbf{u}'(x) = 1-\ln x \quad \forall x \in [\alpha;1]$

la fonction $x \to 2x - x\ln x$ est une primitive de la fonction $x \to 1-\ln x$ sur $[\alpha;1]$

b) En utilisant une intégration par parties, montrer que : $\int_{\alpha}^{1}(1-\ln x)^2 dx = 5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$

on pose $J = \int_{\alpha}^{1}(1-\ln x)^2 dx$

$\mathbf{u}(x) = (1-\ln x)^2 \qquad \mathbf{u}'(x) = -2(1-\ln x)\frac{1}{x}$

$\mathbf{v}'(x) = 1 \qquad \mathbf{v}(x) = x$

$J = \left[x(1-\ln x)^2\right]_{\alpha}^{1} - \int_{\alpha}^{1} -2x(1-\ln x)\frac{1}{x}dx \Leftrightarrow J = 1-\alpha(1-\ln\alpha)^2 + 2\int_{\alpha}^{1}(1-\ln x)dx$

$J = 1-\alpha(1-\ln\alpha)^2 + 2\left[2x - x\ln x\right]_{\alpha}^{1} \Leftrightarrow J = 1-\alpha(1-\ln\alpha)^2 + 4-(4\alpha-2\alpha\ln\alpha)$

Donc $J = 5-\alpha(1-2\ln\alpha+(\ln\alpha)^2)-(4\alpha-2\alpha\ln\alpha)$

Donc $J = 5(1-\alpha)+2\alpha\ln\alpha-\alpha(\ln\alpha)^2+2\alpha\ln\alpha$

Donc $J = 5(1-\alpha)+4\alpha\ln\alpha-\alpha(\ln\alpha)^2$

$\int_{\alpha}^{1}(1-\ln x)^2 dx = 5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$

c) Déduire en fonction de α l'aire de la partie du plan délimité par la courbe (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = α et x = 1.

$A = \int_{\alpha}^{1}|f(x)|dx \, 1cm \times 1cm \qquad \forall x \in [\alpha;1] \;\; f(x) \geq x$ donc $f(x) > 0 \;\; \forall x \in [\alpha;1]$

$A = \int_{\alpha}^{1} f(x)dx \, (cm^2)$ on pose $I = \int_{\alpha}^{1} f(x)dx$

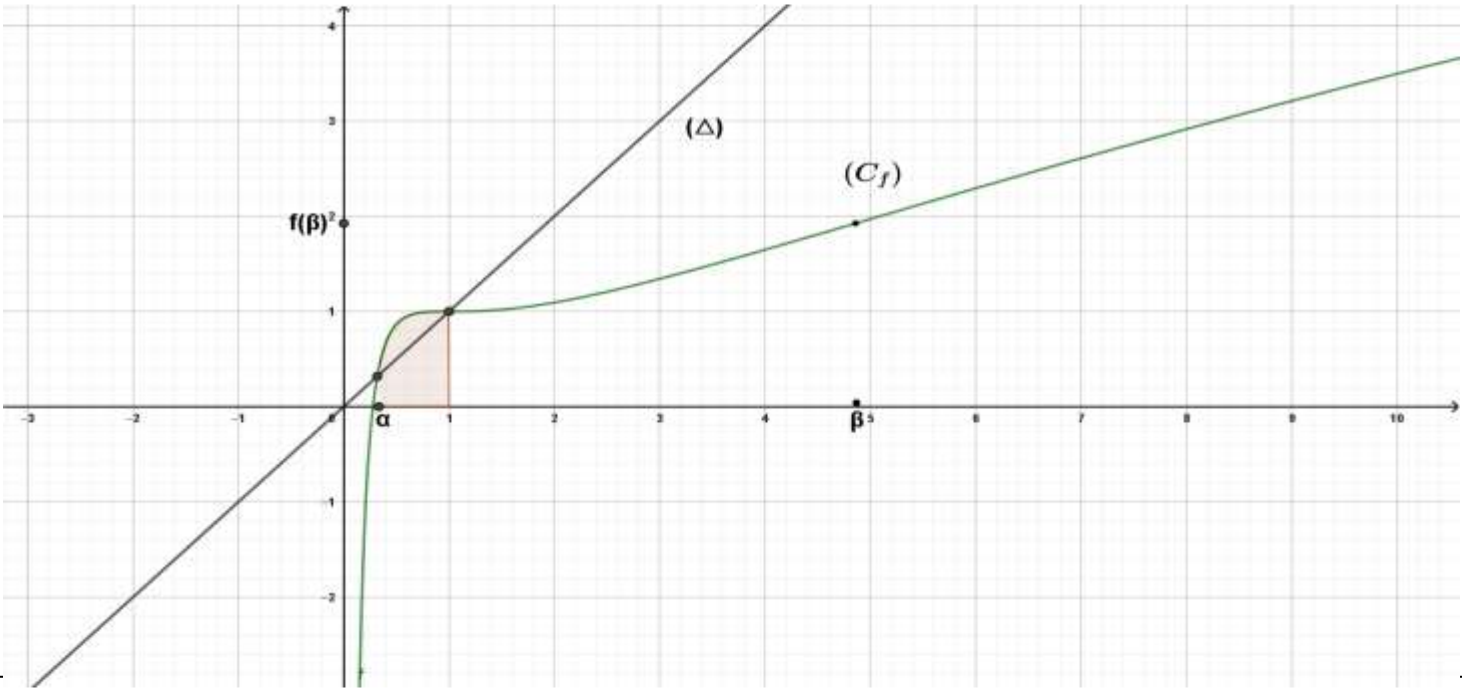
$I = \int_{\alpha}^{1} 2-\frac{2}{x}+(1-\ln x)^2 dx$; on a $x \to 2-\frac{2}{x}$ et $x \to (1-\ln x)^2$ sont continues sur $[\alpha;1]$

Donc $I = \int_{\alpha}^{1} f(x)dx = \int_{\alpha}^{1}(2-\frac{2}{x})dx + \int_{\alpha}^{1}(1-\ln x)^2 dx$

On a $\int_{\alpha}^{1}(2-\frac{2}{x})dx = \left[2x-2\ln x\right]_{\alpha}^{1} = 2-2\alpha+2\ln\alpha$

Donc $I = 2-2\alpha+2\ln\alpha+5(1-\alpha)+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$ $I = 7(1-\alpha)+2\ln\alpha+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha$

D'où $A = \left[7(1-\alpha)+2\ln\alpha+\alpha(4-\ln\alpha)\ln\alpha\right]cm^2$



7) Soit la suite (U_n) définie par $U_0 \in]\alpha;1[$

$U_{n+1} = f(U_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer par récurrence que: $\alpha < U_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $U_0 \in]\alpha;1[$ donc $\alpha < U_0 < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$ supposons que $\alpha < U_n < 1$ et montrons que $\alpha < U_{n+1} < 1$

On a f est strictement croissante sur $[\alpha;1]$ et $\alpha < U_n < 1$

Donc $f(\alpha) < f(U_n) < f(1)$

Or $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$ et $g(1) = 0 \Leftrightarrow f(1) = 1$

Donc $\alpha < U_{n+1} < 1$

D'où $\alpha < U_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante. (on peut utiliser la question 4) b)

On a $\forall x \in [\alpha;1] \ f(x) \geq x$ or $U_n \in]\alpha;1[$

Donc $f(U_n) \geq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $U_{n+1} \geq U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

D'où la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente et calculer sa limite.

On a la suite (U_n) est croissante et majorée

D'où la suite (U_n) est convergente

On a $U_{n+1} = f(U_n)$ et $U_0 \in]\alpha;1[$

f est continue sur $[\alpha;1]$ et $f([\alpha;1]) = [\alpha;1]$

(U_n) est convergente donc sa limite est une solution de l'équation $f(x) = x$

On sait que $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow g(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha$ ou $x = 1$

Or (U_n) est croissante donc $U_n \geq U_0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Donc $U_0 \leq U_n < 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et $U_0 \in]\alpha;1[$

D'où $\lim U_n = 1$