| Année scolaire : 2022 – 2023 | Solution de l'examen national 2016 SN | AGOUZAL<br>2 BPCF |
|---|---|---|

## Exercice 1 :

On considère la suite $(U_n)$ définie par :

$$U_{n+1}=\frac{3+U_n}{5-U_n}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad \text{et}\quad U_0=2$$

1) Montrer que : $U_{n+1}-3=\dfrac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)}$

$$U_{n+1}-3=\frac{3+U_n}{5-U_n}-3=\frac{3+U_n-15+3U_n}{2+3-U_n}$$

$$=\frac{4U_n-12}{2+3-U_n}=\frac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)}$$

Puis montrer que : $U_n<3\quad \forall n\in\mathbb{N}$

On considère la suite $(U_n)$ définie par :

Pour n = 0 on a $U_0=2$ donc $U_0<3$

Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $U_n<3$ et montrons que $U_{n+1}<3$ c'est-à-dire $U_{n+1}-3<0$

On a $U_{n+1}-3=\dfrac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)}$

Puisque $U_n<3$ donc $U_n-3<0$ et $3-U_n>0$

Donc $U_{n+1}-3=\dfrac{4(U_n-3)}{2+(3-U_n)}<0$ donc $U_{n+1}<3$

D'où $U_n<3\quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) On considère la suite $(V_n)$ définie par :

$$V_n=\frac{U_n-1}{3-U_n}\qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

a – Montrons que $V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$ ?

$$V_{n+1}=\frac{U_{n+1}-1}{3-U_{n+1}}=\frac{\dfrac{3+U_n}{5-U_n}-1}{\dfrac{4(U_n-3)}{5-U_n}}=\frac{\dfrac{3+U_n-5+U_n}{5-U_n}}{\dfrac{4(3-U_n)}{5-U_n}}$$

$$V_{n+1}=\frac{2(U_n-1)}{4(3-U_n)}=\frac{1}{2}\left(\frac{U_n-1}{3-U_n}\right)\quad \text{donc}\quad V_{n+1}=\frac{1}{2}V_n$$

D'où $(V_n)$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$

$$V_0=\frac{U_0-1}{3-U_0}=1\quad \text{et}\quad V_n=V_0\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

D'où $V_n=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\quad \forall n\in\mathbb{N}$

b – On a $V_n=\dfrac{U_n-1}{2U_n-1}\Leftrightarrow V_n(3-U_n)=U_n-1$

$$\Leftrightarrow 3V_n+1=U_n+V_nU_n\Leftrightarrow U_n(1+V_n)=3V_n+1$$

D'où $U_n=\dfrac{1+3V_n}{1+V_n}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

D'où $U_n=\dfrac{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

c) $\lim U_n=\lim\dfrac{1+3\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1+\left(\frac{1}{2}\right)^n}=1$

Car $-1<\frac{1}{2}<1$ et $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$

## Exercice 2 :

C(2, 2,1) ; B(3, 1, 1) ; A(2, 1, 3),

1) a – Montrer que : $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}0\\1\\-2\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=\begin{vmatrix}0&1\\-2&-2\end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix}1&0\\-2&-2\end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix}1&0\\0&1\end{vmatrix}\vec{k}$$

$$=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$$

D'où $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}=2\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}$

b – En déduire que 2x + 2y + z – 9 = 0 est une équation cartésienne du plan (ABC).

Soit $M(x\,;y\,;z)\in(ABC)$

$\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

(ABC) : 2x + 2y + z + d = 0 or $A(2, 1, 3)\in(ABC)$

Donc $2\times 2+2\times 1+3+d=0$ donc $d=-9$

D'où (ABC) : 2x + 2y + z – 9 = 0

2) Soit (S) la sphère d'équation :

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$$

a) Montrer que le centre de (S) est $\Omega(1,-1,0)$ et pour rayon 6.

$$x^2+y^2+z^2-2x+2y-34=0$$

$$a=\frac{-2}{-2}=1\ ;\ b=\frac{2}{-2}=-1\ ;\ c=0\ ;\ d=-34$$

$$a^2+b^2+c^2-d=(1)^2+(-1)^2+0^2-(-34)=36>0$$

Donc le centre de (S) est $\Omega(1;-1;0)$ et $R=\sqrt{36}=6$

D'où $\Omega(1;-1;0)$ et rayon $R=6$

b – Montrer que $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=3$

(ABC) : 2x + 2y + z – 9 = 0 $\quad \Omega(1;-1;0)$

$$\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=\frac{|2\times1+2\times(-1)+0-9|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=\frac{9}{3}=3$$

D'où $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=3$

On a $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))=3$ et $\mathbf{R}=6$

Donc $\mathbf{d}(\Omega,(\mathbf{ABC}))<\mathbf{R}$

Donc le plan (ABC) coupe la sphère selon un cercle $(\Gamma)$

3) a - Déterminer une représentation paramétrique de la droite $(\Delta)$ passant par $\Omega$ et Orthogonal au plan (ABC).

On a $(\Delta)$ est Orthogonal au plan (ABC)

On a $\overrightarrow{\mathbf{AB}}\wedge\overrightarrow{\mathbf{AC}}\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

Don c'est un vecteur directeur de la droite $(\Delta)$

Soit M(x ;y ;z)$\in(\Delta)$

$$(\Delta):\begin{cases}\mathbf{x}=1+2\mathbf{t}\\ \mathbf{y}=-1+2\mathbf{t}\\ \mathbf{z}=0+\mathbf{t}\end{cases}\quad (t\in\mathbb{R})$$

b) B est le centre du cercle $(\Gamma)$ $\quad(\Delta)\cap(\mathbf{ABC})=\{\mathbf{B}\}$ ?

Première méthode :

M(x ;y ;z) $\mathbf{M}(\mathbf{x};\mathbf{y};\mathbf{z})\in(\Delta)\cap(\mathbf{ABC})$ équivaut à

$$\begin{cases}\mathbf{x}=1+2\mathbf{t}\\ \mathbf{y}=-1+2\mathbf{t}\\ \mathbf{z}=\mathbf{t}\\ 2\mathbf{x}+2\mathbf{y}+\mathbf{z}-9=0\end{cases}$$

$$2(1+2\mathbf{t})+2(-1+2\mathbf{t})+\mathbf{t}-9=0$$

Donc $2+4\mathbf{t}-2+4\mathbf{t}+\mathbf{t}-9=0\Leftrightarrow 9\mathbf{t}=9\Leftrightarrow\mathbf{t}=1$

$$\begin{cases}\mathbf{x}=1+2\\ \mathbf{y}=-1+2\\ \mathbf{z}=1\end{cases}$$ d'où B(3 ;1 ;1) est le centre du cercle $(\Gamma)$

Deuxième méthode :

On a $(\Delta)\cap(\mathbf{ABC})=\{\mathbf{B}\}$ et on sait que B $\in$ (ABC) il suffit de montrer que B $\in(\Delta)$ $\quad$ B(3 ;1 ;1)

$$\begin{cases}3=1+2\mathbf{t}\\ 1=-1+2\mathbf{t}\\ 1=\mathbf{t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2=2\mathbf{t}\\ 2=+2\mathbf{t}\\ 1=\mathbf{t}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\mathbf{t}=1\\ \mathbf{t}=1\\ \mathbf{t}=1\end{cases}$$ donc B $\in(\Delta)$

D'où B(3 ;1 ;1) est le centre du cercle $(\Gamma)$.

## Exercice 3 :

1) Résoudre dans C : $\mathbf{z}^2-4\mathbf{z}+29=0$

$$\Delta=(-4)^2-4\times1\times29=-100$$

$$=(10\mathbf{i})^2$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\mathbf{z}_1=\frac{4+10\mathbf{i}}{2}=2+5\mathbf{i}\ \text{ et }\ \mathbf{z}_2=\overline{\mathbf{z}_1}=2-5\mathbf{i}$$

D'où $\mathbf{S}=\{2-5\mathbf{i};2+5\mathbf{i}\}$

2) $\Omega$, A et B d'affixes respectives $\omega = 2 + 5i$ ; $a = 5+2i$ ; $b = 5 + 8i$

a) $u = b - \omega$

Vérifier que $u = 3 + 3i$

$u = b - \omega = 5 + 8i - (2 + 5i) = 5 + 8i - 2 - 5i = 3 + 3i$

d'où $u = 3 + 3i$

$$|\mathbf{u}|=|3(1+\mathbf{i})|=3|1+\mathbf{i}|=3\sqrt{1^2+1^2}=3\sqrt{2}$$

$$\mathbf{u}=3(1+\mathbf{i})=3\sqrt{2}(\frac{1}{\sqrt{2}}+\mathbf{i}\frac{1}{\sqrt{2}})=3\sqrt{2}(\frac{\sqrt{2}}{2}+\mathbf{i}\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$\mathbf{u}=3\sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4}+\mathbf{i}\sin\frac{\pi}{4})$$

D'où $\arg(\mathbf{u})\equiv\frac{\pi}{4}[2\pi]$

b) Déterminer un argument de $\overline{\mathbf{u}}$ le conjugué de u

on sait que $\arg\overline{\mathbf{u}}\equiv-\arg\mathbf{u}[2\pi]$

d'où $\arg\overline{\mathbf{u}}\equiv-\frac{\pi}{4}[2\pi]$

c) ) Vérifier que $\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}=\overline{\mathbf{u}}$

$$\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}=5+2\mathbf{i}-(2+5\mathbf{i})=5+2\mathbf{i}-2-5\mathbf{i}=3-3\mathbf{i}$$

$$\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}=3-3\mathbf{i}=\overline{\mathbf{u}}$$

En déduire que $\Omega\mathbf{A}=\Omega\mathbf{B}$ et $\arg\left(\frac{\mathbf{b}-\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

On $\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}=\overline{\mathbf{u}}$ et $\mathbf{u}=\mathbf{b}-\boldsymbol{\omega}$

On sait que $|\mathbf{u}|=|\overline{\mathbf{u}}|$

Donc $|\mathbf{u}|=|\overline{\mathbf{u}}|\Leftrightarrow|\mathbf{b}-\boldsymbol{\omega}|=|\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}|\Leftrightarrow\Omega\mathbf{A}=\Omega\mathbf{B}$

$$\arg\left(\frac{\mathbf{b}-\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}}\right)\equiv\arg(\mathbf{b}-\boldsymbol{\omega})-\arg(\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega})[2\pi]$$

$$\equiv\arg(\mathbf{u})-\arg(\overline{\mathbf{u}})\frac{\pi}{2}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{4}-(-\frac{\pi}{4})[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

D'où $\arg\left(\frac{\mathbf{b}-\boldsymbol{\omega}}{\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

d) Soit R la rotation de centre $\Omega$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

Déterminer l'image du point A par la rotation R $\mathbf{R}(\mathbf{A})$ ?

$$\mathbf{R}(\mathbf{A})=A'\Leftrightarrow a'=e^{i\frac{\pi}{2}}(\mathbf{a}-\boldsymbol{\omega})+\boldsymbol{\omega}\Leftrightarrow\mathbf{a}'=e^{i\frac{\pi}{2}}\overline{\mathbf{u}}+\boldsymbol{\omega}$$

$$\Leftrightarrow\mathbf{a}'=\mathbf{i}(3-3\mathbf{i})+2+5\mathbf{i}\Leftrightarrow\mathbf{a}'=3\mathbf{i}+3+2+5\mathbf{i}$$

$$\Leftrightarrow\mathbf{a}'=5+8\mathbf{i}=\mathbf{b}$$

D'où $\mathbf{R}(\mathbf{A})=B$

Problème :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^{x}$$

$(C_f)$ est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a) Montrer que : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x - 2 + e^{2x} - 4e^{x}$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} 2x - 2 + \left(e^{x}\right)^2 - 4e^{x} = -\infty$$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x - 2 = -\infty$

b) Montrer que la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $(C_f)$ au voisinage de $-\infty$.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) - (2x - 2) = \lim_{x \to -\infty} \left(e^{x}\right)^2 - 4e^{x} = 0$$

car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$ donc la droite (D) d'équation $y = 2x - 2$ est asymptote à $(C_f)$ au voisinage de $-\infty$.

2) a – Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} 2x - 2 + e^{x}(e^{x} - 4) = +\infty$$

$$\lim_{x \to +\infty} e^{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} 2x - 2 = +\infty$$

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2x - 2 + e^{x}(e^{x} - 4)}{x}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} 2 - \frac{2}{x} + \frac{e^{x}}{x}(e^{x} - 4) = +\infty$$

Car **Erreur ! Signet non défini.** et

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^{x}}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to +\infty} (e^{x} - 4) = +\infty$$

On a $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ d'où la courbe (C) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées.

3) a – Montrer que $f'(x) = 2(e^{x} - 1)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = 2x - 2 + e^{2x} - 4e^{x}$$

$$f'(x) = 2 + 2e^{2x} - 4e^{x} = 2((e^{x})^2 - 2e^{x} + 1)$$

**D'où** $f'(x) = 2(e^{x} - 1)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
(Remarquer que $f(0) = 0$)

On a $f'(x) = 2(e^{x} - 1)^2 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc f est croissante sur R.

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | + |
| $f(x)$ | $-\infty$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

c) Montrer qu'il existe un réel unique $\alpha$ dans l'intervalle $]1, \ln 4[$ tel que $f(\alpha) = 0$

f est continue et strictement croissante sur R en particulier sur $[1; \ln 4]$

$f(1) = e^2 - 4e < 0$ $e^2 - 4e \approx -3,51$ donc $f(1) < 0$

$$f(\ln 4) = 2\ln 4 - 2 + e^{2\ln 4} - 4e^{\ln 4}$$

$$f(\ln 4) = 2\ln 4 - 2 + e^{\ln 4^2} - 4 \times 4$$

$$f(\ln 4) = 2\ln 4 - 2 + 16 - 16 = 2\ln 4 - 2 > 0$$

$f(\ln 4) > 0$ donc $f(1)f(\ln 4) < 0$

D'où l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution $\alpha$ dans $]1; \ln 4[$

4) a) Montrer que $(C_f)$ se trouve au-dessus de (D) sur $]\ln 4, +\infty[$ et en dessous de (D) sur $]-\infty, \ln 4[$

$$f(x) - (2x - 2) = e^{2x} - 4e^{x} = e^{x}(e^{x} - 4)$$

$$f(x) - (2x - 2) = 0 \Leftrightarrow e^{x}(e^{x} - 4) = 0$$

Or $\forall x \in \mathbb{R} \quad e^{x} > 0$

$$e^{x} - 4 = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 4 \Leftrightarrow x = \ln 4$$

| x | $-\infty$ | ln4 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $e^{x} - 4$ | – | 0 | + |

$(C_f)$ se trouve au-dessus de (D) sur $]\ln 4, +\infty[$ et en dessous de (D) sur $]-\infty, \ln 4[$

b – Montrer que $(C_f)$ admet un point d'inflexion de coordonnées (0 ;5).

$$f''(x) = 4(e^{x} - 1)e^{x}$$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow e^{x} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{x} = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

| x | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | – | 0 | + |

$C_f$) admet un point d'inflexion de coordonnées (0 ;–5)
$f(0) = -5$

5) a) Montrer que $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^{x})dx = -\dfrac{9}{2}$

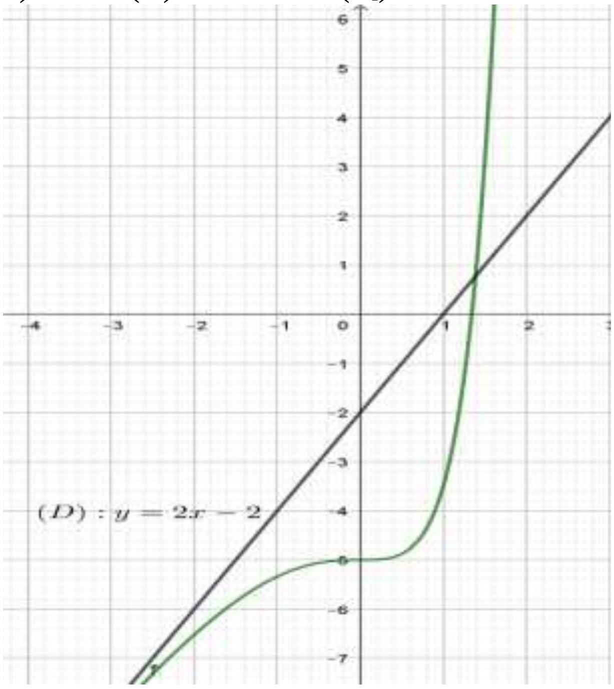
$$\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^{x})dx = \left[\frac{1}{2}e^{2x} - 4e^{x}\right]_0^{\ln 4}$$

$$\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^{x})dx = \frac{1}{2}e^{2\ln 4} - 4e^{\ln 4} - (\frac{1}{2} - 4)$$

$$\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^{x})dx = 8 - 16 + \frac{7}{2} = -\frac{9}{2}$$

D'où $\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^{x})dx = -\dfrac{9}{2}$

4) Tracer (D) et la courbe $(C_f)$.




5) b) Calculer en $cm^2$ l'aire du domaine limité par (C), la droite (D), l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = \ln 4$

$$A = \int_0^{\ln 4} |f(x) - (2x - 2)| dx \, 1cm \times 1cm$$

$(C_f)$ se trouve en dessous de (D) sur $]-\infty, \ln 4]$

$$A = \int_0^{\ln 4} -(e^{2x} - 4e^{x}) dx (cm^2)$$

$$A = -\int_0^{\ln 4} (e^{2x} - 4e^{x}) dx (cm^2)$$

$$A = \frac{9}{2} (cm^2)$$

**Partie II :**

1) a) Résoudre l'équation différentielle

$$(E) : y'' - 3y' + 2y = 0$$

L'équation caractéristique de (E) est

$r^2 - 3r + 2 = 0$ donc $\Delta = 1$

Donc $r_1 = \frac{3+1}{2} = 2$ et $r_2 = \frac{3-1}{2} = 1$

Donc les solutions de (E) sont :

$$x \to \alpha e^{2x} + \beta e^{x} \text{ où } (\alpha;\beta) \in \mathbb{R}^2$$

b) Déterminer la solution g de (E) tels que $g(0) = -3$ et $g'(0) = -2$

g est une solution de de(E) donc: $g(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{x}$

$$g(0) = -3 \Leftrightarrow \alpha e^{2\times 0} + \beta e^{0} = -3$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \beta = -3 \quad (1)$$

$$g'(x) = 2\alpha e^{2x} + \beta e^{x}$$

$$g'(0) = -2 \Leftrightarrow 2\alpha e^{2\times 0} + \beta e^{0} = -2$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha + \beta = -2 \quad (2)$$

$(1) - (2) \Leftrightarrow 2\alpha + \beta - \alpha - \beta = -2 + 3 \Leftrightarrow \alpha = 1$

On a $\alpha + \beta = -3 \Leftrightarrow \beta = -3 - \alpha \Leftrightarrow \beta = -4$

D'où $g(x) = e^{2x} - 4e^{x}$

2) Soit h la fonction définie sur $]\ln 4; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln(e^{2x} - 4e^{x})$$

a) Montrer que h admet une fonction réciproque $h^{-1}$ est définie sur R.

$$h(x) = \ln(g(x))$$

On a $g$ est continue strictement positive sur $]\ln 4; +\infty[$ (car g est une solution de (E) donc deux fois dérivable sur R et $(C_f)$ se trouve au-dessus de (D) sur $]\ln 4, +\infty[$ ) et ln continue sur $]0; +\infty[$

Donc h est continue sur $]\ln 4; +\infty[$.

$$h'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2(e^{x} - 2)}{e^{x} - 4} \quad \forall x \in ]\ln 4; +\infty[$$

$$x > \ln 4 \Leftrightarrow e^{x} > e^{\ln 4} \Leftrightarrow e^{x} - 2 > 4 - 2$$

Donc $\forall x \in ]\ln 4; +\infty[$ $e^{x} - 2 > 2$ et $e^{x} - 4 > 0$

Donc $\frac{2(e^{x} - 2)}{e^{x} - 4} > 0$ donc $h'(x) > 0$ ; $\forall x > \ln 4$

Donc h est strictement croissante sur $]\ln 4; +\infty[$

Donc h admet une fonction réciproque $h^{-1}$ est définie sur $h(]\ln 4; +\infty[)$

$$h(]\ln 4; +\infty[) = \left] \lim_{x \to (\ln 4)^+} h(x); \lim_{x \to +\infty} h(x) \right[$$

$$\lim_{x \to +\infty} h(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln(e^{2x} - 4e^{x}) = +\infty$$

$\lim_{t \to +\infty} e^{x}(e^{x} - 4) = +\infty$ et $\lim_{t \to +\infty} \ln(t) = +\infty$

$$\lim_{x \to (\ln 4)^+} h(x) = \lim_{x \to (\ln 4)^+} \ln(e^{2x} - 4e^{x}) = -\infty$$

$\lim_{x \to (\ln 4)^+} (e^{2x} - 4e^{x}) = 0^+$ et $\lim_{t \to 0^+} \ln(t) = -\infty$

$$\forall x \in ]\ln 4; +\infty[ \quad e^{2x} - 4e^{x} > 0$$

b) Vérifier que $h(\ln 5) = \ln 5$ puis déterminer $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5)$

$$h(\ln 5) = \ln(e^{2\ln 5} - 4e^{\ln 5}) = \ln(e^{\ln 5^2} - 4 \times 5)$$

$$h(\ln 5) = \ln(25 - 20) = \ln 5$$

$$\left(h^{-1}\right)'(\ln 5) = \frac{1}{h'(h(\ln 5))} = \frac{1}{h'(\ln 5)}$$

**Or** $h'(\ln 5) = \frac{2(e^{\ln 5} - 2)}{e^{\ln 5} - 4} = \frac{2(5-2)}{5-4} = 6$

**D'où** $\left(h^{-1}\right)'(\ln 5) = \frac{1}{6}$