

**Exercice 1 : (2014 S2) (3pts)**

Soit dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct

$(\mathbf{O}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  le point  $A(0, 0, 1)$ , le plan (P) tel que :

(P) :  $2x + y - 2z - 7 = 0$  et la sphère (S) de centre  $\Omega(0, 3, -2)$  et de rayon  $R = 3$

1) a – Montrer que  $\begin{cases} x = 2t \\ y = t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$  est une

représentation paramétrique de la droite ( $\Delta$ ) passant par A et perpendiculaire au plan (P).

b) Vérifier que  $H(2, 1, -1)$  est le point d'intersection de (P) et ( $\Delta$ )

2) a) posons  $\vec{u} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$ , montrer que :

$$\overrightarrow{\Omega A} \wedge \vec{u} = 3(\vec{i} + 2\vec{j} + 2\vec{k})$$

b) Montrer que :  $d(\Omega; (\Delta)) = 3$

c) En déduire que la droite ( $\Delta$ ) est tangente à la sphère (S) et vérifier que H est le point de tangence entre ( $\Delta$ ) et (S).

**Exercice 2 : (2014 S2) (3pts)**

Soit la suite  $(U_n)$  définie par :

$$U_{n+1} = \frac{5U_n - 4}{1 + U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad U_1 = 5$$

1) Montrer que :  $U_n > 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

2) On pose  $V_n = \frac{3}{U_n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

a) Montrer que  $V_{n+1} = \frac{1 + U_n}{U_n - 2}$ , en déduire que

$(V_n)$  est une suite arithmétique de raison 1

b) Ecrire  $V_n$  en fonction de n, en déduire que :

$$U_n = 2 + \frac{3}{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$$

c) Déterminer  $\lim U_n$

**Exercice 3 : (2014 S2) (3pts)**

Pour déterminer les deux questions d'un concours de Recrutement, un candidat tire, successivement et sans remise deux fiches d'un sac contenant dix fiches : 8 fiches concernant les maths et 2 fiches concernant la langue française.

On considère les deux événements suivants:

A " Tirer deux fiches concernant la langue française "

B " Tirer deux fiches concernant deux matières différentes".

Montrer que Montrer que :  $P(A) = \frac{1}{45}$  et  $P(A) = \frac{16}{45}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage fait correspondre le nombre de fiches de la langue française tirées.

a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2.

b) Montrer que  $p(X = 0) = \frac{28}{45}$  puis déterminer la

loi de probabilité de la variable aléatoire X.

**Exercice 4 : (2014 S2) (3 pts)**

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 - 4z + 5 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct

$(\mathbf{O}; \vec{u}, \vec{v})$  on considère les points A, B, C, D et  $\Omega$

d'affixes respectives  $a = 2 + i$  ;  $b = 2 - i$  ;  $c = i$  ;  $d = -i$  et  $\omega = 1$

a) Montrer que  $\frac{a - \omega}{b - \omega} = i$

b) En déduire que le triangle  $\Omega AB$  est rectangle et isocèle en  $\Omega$ .

2) Soient z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation R de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

a) Montrer que  $z' = iz + 1 - i$ .

b) Vérifier que  $R(A) = C$  et  $R(D) = B$

c) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent au même cercle dont on déterminera le centre.

**Problème : (2014 S2) (8pts)**

On considère la fonction f définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$f(x) = (xe^x - 1)e^x$$

(C) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé  $(\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j})$  (unité : 2 cm)

1) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$  et interpréter le

résultat géométriquement.

2) a) Montrer que:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$

b) En déduire que (C) admet une branche parabolique au voisinage de  $+\infty$  dont on précisera la direction.

3) a) Montrer que  $f'(x) = e^x(e^x - 1 + 2xe^x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Et vérifier que  $f'(0) = 0$

b) Montrer que :  $e^x - 1 \geq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$  et

$$e^x - 1 \leq 0 \quad \forall x \in ]-\infty; 0]$$

c) Montrer que f est croissante sur  $[0; +\infty[$  et décroissante sur  $]-\infty; 0]$  puis dresser le tableau de variation de f sur  $\mathbb{R}$ .

4) a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet une solution unique  $\alpha$  dans l'intervalle  $[0; +\infty[$  et que  $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

(on admet  $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}} < 1$ )

b) Construire la courbe (C) dans le repère  $(\mathbf{O}; \vec{i}, \vec{j})$ . (On admet que la courbe (C) admet un point d'inflexion unique dont les coordonnées ne sont pas demandées).

5) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

$$\int_0^{\frac{1}{2}} xe^{2x} dx = \frac{1}{4}$$

6) Calculer en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine limité par (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = \frac{1}{2}$