Exercice 1 : (2,5 pts)

1) a - Résoudre dans ℝ l'équation suivante :

$$x^2-2x-3=0$$

$\Delta=(-2)^2-4\times1\times(-3)=16>0$ l'équation admet deux solutions distincts.

$x_1=\dfrac{2+\sqrt{16}}{2}=\dfrac{2+4}{2}=3$ et $x_2=\dfrac{2-\sqrt{16}}{2}=\dfrac{2-4}{2}=-1$

$S=\{-1;3\}$

b – Résoudre dans ℝ l'équation suivante :

$e^x-\dfrac{3}{e^x}-2=0$ $\quad e^x>0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

$\dfrac{\left(e^x\right)^2-2e^x-3}{e^x}=0 \Leftrightarrow \left(e^x\right)^2-2e^x-3=0$

On pose $t=e^x$ donc $t^2-2t-3=0$

donc $t=3$ ou $t=-1$

donc $e^x=3$ ou $e^x=-1$ or $e^x>0\quad \forall x\in\mathbb{R}$

donc $e^x=3\Leftrightarrow x=\ln3$

D'où $S=\{\ln3\}$

2) Résoudre dans ℝ l'inéquation suivante :

$e^{x+1}-e^{-x}\geq0$

$e^{x+1}-e^{-x}\geq0\Leftrightarrow e^{x+1}\geq e^{-x}\Leftrightarrow x+1\geq-x$

$\Leftrightarrow 2x\geq-1\Leftrightarrow x\geq-\dfrac{1}{2}$

D'où $S=\left[-\dfrac{1}{2};+\infty\right[$

Exercice 2 : (4 pts)

1) Résoudre dans ℂ l'équation : $Z^2-6Z+18=0$

$\Delta=(-6)^2-4\times1\times18=-36<0$

$=(6i)^2$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$z_1=\dfrac{6+6i}{2}=3+3i$ et $z_2=\overline{z_1}=3-3i$

D'où $S=\{3-3i;3+3i\}$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O;\vec{u};\vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives $a=3+3i$, $b=3-3i$

a – Ecrire a et b sous forme trigonométrique

$|a|=|3(1+i)|=3|1+i|=3\sqrt{1^2+1^2}=3\sqrt{2}$

$a=3(1+i)=3\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+i\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=3\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$=3\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ d'où $a=\left[3\sqrt{2};\dfrac{\pi}{4}\right]$

On a $b=\overline{a}$ donc $b=\left[3\sqrt{2};-\dfrac{\pi}{4}\right]$

b – Montrer que b' l'affixe du point B' image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ est 6

B' image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$

Donc $b'=b+\text{aff}(\overrightarrow{OA})=b+a$

$b'=3-3i+3+3i=6$ d'où $b'=6$

c – Montrer que : $\dfrac{b-b'}{a-b'}=i$ puis en déduire que le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B'.

$\dfrac{b-b'}{a-b'}=\dfrac{3-3i-6}{3+3i-6}=\dfrac{-3-3i}{-3+3i}$

$\dfrac{b-b'}{a-b'}=\dfrac{-3(1+i)}{-3(1-i)}=\dfrac{1+i}{1-i}$

$\dfrac{b-b'}{a-b'}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{2i}{2}$

D'où $\dfrac{b-b'}{a-b'}=i$

On a $\dfrac{b-b'}{a-b'}=i=\cos\dfrac{\pi}{2}+\sin\dfrac{\pi}{2}=\left[1;\dfrac{\pi}{2}\right]$

On a $\dfrac{b-b'}{a-b'}=\left[1;\dfrac{\pi}{2}\right]$ donc $\left|\dfrac{b-b'}{a-b'}\right|=1$

Donc $\dfrac{BB'}{AB'}=1$ et $\arg\left(\dfrac{b-b'}{a-b'}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $AB'=BB'$ et $\left(\overrightarrow{B'A};\overrightarrow{B'B}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

D'où le triangle $AB'B$ est isocèle et rectangle en B'.

d – En déduire que le quadrilatère $OAB'B$ est un carré

Le point B' image du point B par la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$ donc $\overrightarrow{BB'}=\overrightarrow{OA}$

Donc le quadrilatère $OAB'B$ est un parallélogramme

On a $AB'=BB'$ et $\left(\overrightarrow{B'A};\overrightarrow{B'B}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ Donc

D'où le quadrilatère $OAB'B$ est un carré

Exercice 3 : (3,5 pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1}=\frac{6U_n}{15U_n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}\quad \text{et}\quad U_0=1$$

1) a – Montrer que: $U_{n+1}-\dfrac{1}{3}=\dfrac{U_n-\dfrac{1}{3}}{15U_n+1}\quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$U_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{6U_n}{15U_n+1}-\frac{1}{3}=\frac{18U_n-15U_n-1}{3(15U_n+1)}$$

$$U_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{3(U_n-\frac{1}{3})}{3(15U_n+1)}=\frac{U_n-\frac{1}{3}}{15U_n+1}$$

D'où $U_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{U_n-\frac{1}{3}}{15U_n+1}$

b – Montrer que : $U_n>\frac{1}{3} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

Pour n = 0 on a $U_0=1$ donc $U_0>\frac{1}{3}$

Soit $n\in\mathbb{N}$ supposons que $U_n>\frac{1}{3}$ et montrons que $U_{n+1}>\frac{1}{3}$ c'est-à-dire $U_{n+1}-\frac{1}{3}>0$

On a $U_n>\frac{1}{3}$ donc $U_n-\frac{1}{3}>0$ et

$15U_n+1>6$ donc $U_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{U_n-\frac{1}{3}}{15U_n+1}>0$

D'où $U_n>\frac{1}{3} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n=1-\frac{1}{3U_n} \qquad \forall n\in\mathbb{N}$$

Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ puis écrire V_n en fonction de n.

Montrons que $V_{n+1}=\frac{1}{6}V_n$?

$$V_{n+1}=1-\frac{1}{3U_{n+1}}=1-\frac{1}{\frac{18U_n}{15U_n+1}}$$

$$V_{n+1}=1-\frac{15U_n+1}{18U_n}=\frac{18U_n-15U_n-1}{18U_n}$$

$$V_{n+1}=\frac{3U_n-1}{18U_n}=\frac{3U_n}{18U_n}-\frac{1}{18U_n}$$

$$V_{n+1}=\frac{1}{6}-\frac{1}{18U_n}=\frac{1}{6}(1-\frac{1}{3U_n})$$

D'où $V_{n+1}=\frac{1}{6}V_n$

D'où (V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$

(V_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{6}$ de premier terme $V_0=1-\frac{1}{3U_0}=\frac{2}{3}$ $\quad V_n=V_0\left(\frac{1}{6}\right)^n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

D'où $V_n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n \qquad \forall n\in\mathbb{N}$

3) Montrer que $U_n=\frac{1}{3-2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$ et en déduire $\lim U_n$

On a $V_n=1-\frac{1}{3U_n} \Leftrightarrow \frac{1}{3U_n}=1-V_n$

$\Leftrightarrow 3U_n=\frac{1}{1-V_n} \Leftrightarrow U_n=\frac{1}{3-3\frac{2}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

$\Leftrightarrow U_n=\frac{1}{3-2\left(\frac{1}{6}\right)^n}$

D'où $U_n=\frac{1}{3-2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

On a $U_n=\frac{1}{3-2\left(\frac{1}{6}\right)^n} \quad \forall n\in\mathbb{N}$

$$\lim U_n=\lim\frac{1}{3-2\left(\frac{1}{6}\right)^n}=\frac{1}{3-2\times 0}=\frac{1}{3}$$

D'où $\lim U_n=\frac{1}{3}$

Problème : (10 pts)

Partie I :

On considère la fonction g définie sur $I=]0;+\infty[$ par : $g(x)=x-1+\ln x$

1) a – Montrer que $g'(x)=\frac{x+1}{x} \qquad \forall x\in I$

$g(x)=x-1+\ln x$

Donc $g'(x)=1+\frac{1}{x}$ d'où $g'(x)=\frac{x+1}{x} \quad \forall x\in I$

b – Montrer que g est croissante sur I

On a $g'(x)=\frac{x+1}{x} \quad \forall x\in]0;+\infty[$

Donc $g'(x)>0$

D'où g est croissante sur I

2) En déduire que : $g(x)\le 0 \quad \forall x\in]0,1]$

Et que $g(x)\ge 0 \quad \forall x\in[1,+\infty[$

On sait que g est croissante sur $]0;+\infty[$

$g(1)=0$

$\forall x\in]0,1]$ donc $0<x\le 1$

donc $x\le 1$ donc $g(x)\le g(1)$

Or $g(1)=0$

D'où $g(x)\le 0 \quad \forall x\in]0,1]$

$\forall x\in[1,+\infty[$ donc $x\ge 1$ donc $g(x)\ge g(1)$

D'où $g(x)\ge 0 \qquad \forall x\in[1,+\infty[$

Deuxième partie

On considère la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par

$$f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ et e interpréter le résultat géométriquement

$$\lim_{x\to0^+} f(x)=\lim_{x\to0^+}\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x=+\infty$$

car $\lim\limits_{x\to0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\frac{x-1}{x}\right)=-\infty$

On a $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$ la droite d'équation $x = 0$

Est une asymptote verticale à la courbe (C).

2) a – Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x=+\infty$$

car et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1$

et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$?

(Remarquer que $\frac{f(x)}{x}=\left(\frac{x-1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}$ $\forall x\in I$)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{1}{x}\right)\ln x}{x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{\ln x}{x}=0$$

Car $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}1-\frac{1}{x}=1$

c – En déduire que la courbe (C_f) admet au voisinage de + ∞ une branche parabolique de direction à déterminer.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=0$

D'où la courbe (C) admet au voisinage de + ∞ une branche parabolique de direction l'axe des abscisses.

2) a – Montrer que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ $\forall x\in I$

$$f'(x)=\left(\left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x\right)'$$

$$f'(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)'\ln x+\left(1-\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}$$

$$f'(x)=\frac{1}{x^2}\ln x+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^2}=\frac{x-1+\ln x}{x^2}$$

D'où $f'(x)==\frac{g(x)}{x^2}$ $\forall x\in]0;+\infty[$

b – En déduire que g est croissante sur $[1,+\infty[$ et décroissante sur $]0,1]$.

b) On sait que $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$ $\forall x\in]0;+\infty[$

donc le signe $f'(x)$ est celui de $g(x)$

On a $g(x)\le 0$ $\forall x\in]0,1]$

donc $\forall x\in]0,1]$

D'où f est décroissante sur $]0,1]$

On a $g(x)\ge 0$ $\forall x\in[1,+\infty[$

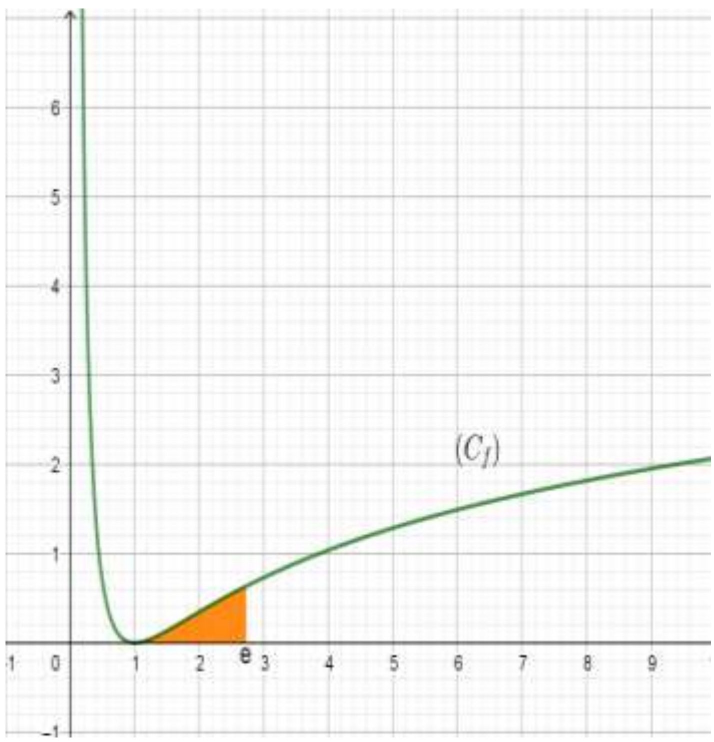
donc $f'(x)\ge 0$ $\forall x\in[1,+\infty[$

D'où f est croissante sur $[1,+\infty[$

c – Dresser le tableau des variations de f.

X	0		1		+∞
f′(x)		−	0	+	
f(x)	+∞	↘	0	↗	+∞

3) Construire la courbe (C_f) (on admettra que (C_f) possède un seul point d'inflexion dont l'abscisse est comprise entre 1,5 et 2).



4) a – Montrer que $H : x \to \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $h : x \to \frac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$

$$H'(x) = \frac{1}{2}\left[(\ln x)^2\right]' = \frac{1}{2}\times 2\times(\ln x)\frac{1}{x} = \frac{\ln x}{x}$$

$$H'(x) = h(x) \qquad \forall x \in I$$

D'où $H : x \to \frac{1}{2}(\ln x)^2$ est une primitive de $h : x \to \frac{\ln x}{x}$ sur $]0;+\infty[$

b – Montrer que : $\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e = \frac{1}{2}\left[(\ln e)^2 - (\ln 1)^2\right]$$

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x}dx = \frac{1}{2}$$

c – A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_1^e \ln x dx = 1$

$$\int_1^e \ln x dx = 1 \ ?$$

$f(x) = \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x}$

$g'(x) = 1 \qquad g(x) = x$

$$\int_1^e \ln x dx = [x\ln x]_1^e - \int_1^e dx$$

$$= e(\ln e) - 1\ln 1 - [x]_1^e = e - e + 1 = 1$$

$$\int_1^e \ln x dx = 1$$

5) a – Vérifier que : $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} \quad \forall x \in I$

$$f(x) = \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = (1-\frac{1}{x})\ln x = \ln x - \frac{\ln x}{x}$$

D'où $f(x) = \ln x - \frac{\ln x}{x} \quad \forall x \in I$

b – Montrer que l'aire du domaine limité par (C_f), l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 1 et x = e est 0,5 cm^2.

On sait que la courbe (C) est au-dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $[1;e]$

$$A = \int_1^e \ln x - \frac{\ln x}{x} dx 1cm \times 1cm$$

$$= \int_1^e \ln x \, dx cm^2 - \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx cm^2$$

$$= (1-\frac{1}{2})cm^2 = \frac{1}{2}cm^2$$