

Exercice 1 : (2,5 pts)1) a - Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

b - Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'équation suivante :

$$\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln 2x$$

2) Résoudre dans $[0; +\infty[$ l'inéquation suivante :

$$\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$$

Exercice 2 : (3 pts)On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{5 + 8U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

1) Montrer que : $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ 2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \frac{1}{U_n} + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a - Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 5 puis écrire V_n en fonction de n.b - Montrer que $U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ eten déduire $\lim U_n$ **Exercice 3 : (5 pts)**1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $Z^2 - 18Z + 82 = 0$ 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes respectives $a = 9 + i$, $b = 9 - i$, $c = 11 - i$ a - Montrer que : $\frac{c-b}{a-b} = -i$ puis en déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.b - Ecrire $4(1 - i)$ sous forme trigonométriquec - Montrer que : $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$ puis en déduire que $AC \times BC = 4\sqrt{2}$ d - Soit z l'affixe de point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation de centre B et d'angle $\frac{3\pi}{2}$. Montrer que $z' = -iz + 10 + 8i$ puis vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9 - 3i$ **Problème : (9,5 pts)****Partie I :**On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = (1-x)e^x - 1$$

1) a - Montrer que $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$ b - Montrer que g est décroissante sur $[0, +\infty[$ etcroissante sur $]-\infty; 0]$ puis vérifier que $g(0) = 0$ 2) En déduire que $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$ **Partie II :**On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (2-x)e^x - x$$

 (C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm)1) a - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ b - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis en déduireque (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction à déterminer.2) a - Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x$ (On sait que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$)b - Montrer que la droite (D) : $y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$ 3) a - Montrer que $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$ b - Interpréter géométriquement le résultat $f'(0) = 0$ c - Montrer que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} et dresser le tableau des variations de f.4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solutionunique α dans \mathbb{R} et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ (on admet $e^{\frac{3}{2}} > 3$)5) a - Résoudre $f(x) + x = 0$ et en déduire que (C_f) et (D) se coupent en un point A(2 ; -2).b - Etudier le signe de $f(x) + x$ sur \mathbb{R} .c - En déduire que (C_f) est au-dessus de (D) sur $]-\infty; 2[$ et en dessous de (D) sur $]2, +\infty[$ 6) a - Montrer que (C_f) possède un seul point d'inflexion de coordonnées (0 ; 2)b - Construire la droite (D) et la courbe (C_f)

7) a - A l'aide d'une intégration par parties montrer

$$\text{que : } \int_{-1}^0 (2-x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$$

b - En déduire en cm^2 l'aire du domaine limité par (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations

$$x = 0 \text{ et } x = -1.$$