

Exercice 1 : (2,5 pts)

1) a - Résoudre dans \mathbb{R} l'équation suivante :

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

b - Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'équation suivante :

$$\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln 2x$$

2) Résoudre dans $]0; +\infty[$ l'inéquation suivante :

$$\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$$

Exercice 2 : (3 pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{5 + 8U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

1) Montrer que : $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) On considère la suite (V_n) définie par :

$$V_n = \frac{1}{U_n} + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a - Montrer que (V_n) est une suite géométrique de raison 5 puis écrire V_n en fonction de n.

b - Montrer que $U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ et

en déduire $\lim U_n$

Exercice 3 : (5 pts)

1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $Z^2 - 18Z + 82 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct

$(O; \vec{u}; \vec{v})$, on considère les points A et B d'affixes

respectives $a = 9 + i$, $b = 9 - i$, $c = 11 - i$

a - Montrer que : $\frac{c-b}{a-b} = -i$ puis en déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

b - Ecrire $4(1 - i)$ sous forme trigonométrique

c - Montrer que : $(c-a)(c-b) = 4(1 - i)$

puis en déduire que $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

d - Soit z l'affixe de point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation de centre B et

d'angle $\frac{3\pi}{2}$. Montrer que $z' = -iz + 10 + 8i$ puis

vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est $9 - 3i$

Problème : (9,5 pts)

Partie I :

On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = (1 - x)e^x - 1$$

1) a - Montrer que $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b - Montrer que g est décroissante sur $[0, +\infty[$ et

croissante sur $]-\infty; 0]$ puis vérifier que $g(0) = 0$

2) En déduire que $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Partie II :

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (2 - x)e^x - x$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 1 cm)

1) a - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

b - Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ puis en déduire

que (C_f) admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction à déterminer.

2) a - Montrer que $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ et calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x \quad (\text{On sait que } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0)$$

b - Montrer que la droite (D) : $y = -x$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $-\infty$

3) a - Montrer que $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b - Interpréter géométriquement le résultat $f'(0) = 0$

c - Montrer que f est strictement décroissante sur \mathbb{R} et dresser le tableau des variations de f.

4) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution

unique α dans \mathbb{R} et que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$ (on admet $e^{\frac{3}{2}} > 3$)

5) a-Résoudre $f(x) + x = 0$ et en déduire que (C_f) et

(D) Se coupent en un point A(2 ; -2).

b - Etudier le signe de $f(x) + x$ sur \mathbb{R} .

c - En déduire que (C_f) est au-dessus de (D) sur $]-\infty; 2[$ et en dessous de (D) sur $]2, +\infty[$

6) a - Montrer que (C_f) possède un seul point d'inflexion de coordonnées (0 ; 2)

b - Construire la droite (D) et la courbe (C_f)

7) a - A l'aide d'une intégration par parties montrer

$$\text{que : } \int_{-1}^0 (2 - x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$$

b - En déduire en cm² l'aire du domaine limité par (C_f) , la droite (D) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = -1$.