

**Exercice 1 :** (2,5 pts)

1) a - Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation suivante :

$$x^2 + 4x - 5 = 0$$

$\Delta = (4)^2 - 4 \times 1 \times (-5) = 36 > 0$  l'équation admet deux solutions distincts.

$$x_1 = \frac{-4 + \sqrt{36}}{2} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4 - \sqrt{36}}{2}$$

$$= \frac{-4 + 6}{2} = 1 \quad \text{et} \quad = \frac{-4 - 6}{2} = -5$$

**S = {-5;1}**

b - Résoudre dans  $]0; +\infty[$  l'équation suivante :

$$\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln 2x$$

$\forall x \in ]0, +\infty[$  donc  $x > 0$  donc  $x^2 + 1 > 0$  et  $x + 2 > 0$  et  $2x > 0$

$$\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2) + \ln 2x$$

$$\ln(x^2 + 5) = \ln(x + 2)2x \Leftrightarrow x^2 + 5 = (x + 2)2x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5 = 2x^2 + 4x \Leftrightarrow x^2 + 4x - 5 = 0$$

Donc  $x = -5$  et  $x = 1$  or  $x > 0$  donc  $x = 1$

**D'où S = {1}**

2) Résoudre dans  $]0; +\infty[$  l'inéquation suivante :

$$\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1)$$

$\forall x \in ]0, +\infty[$  donc  $x > 0$  donc  $x^2 + 1 > 0$  et  $x + 1 > 0$

$$\ln x + \ln(x + 1) \geq \ln(x^2 + 1) \Leftrightarrow \ln[x(x + 1)] \geq \ln(x^2 + 1)$$

$$\Leftrightarrow x(x + 1) \geq x^2 + 1 \Leftrightarrow x \geq 1 \quad \text{or} \quad x > 0$$

**D'où S = [1, +\infty[**

**Exercice 2 :** (3 pts)

On considère la suite  $(U_n)$  définie par :

$$U_{n+1} = \frac{U_n}{5 + 8U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 1$$

1) Montrer que :  $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

Pour  $n = 0$  on a  $U_0 = 1$  donc  $U_0 > 0$

Soit  $n \in \mathbb{N}$  supposons que  $U_n > 0$  et montrons que

$$U_{n+1} > 0$$

On a  $U_n > 0$  donc  $8U_n > 0$  et  $5 + 8U_n > 5$

$$\text{donc } U_{n+1} = \frac{U_n}{5 + 8U_n} > 0$$

**D'où  $U_n > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$**

2) On considère la suite  $(V_n)$  définie par :

$$V_n = \frac{1}{U_n} + 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

a - Montrer que  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison 5 puis écrire  $V_n$  en fonction de  $n$ .

Montrons que  $V_{n+1} = 5V_n$  ?

$$V_{n+1} = \frac{1}{U_{n+1}} + 2 = \frac{1}{\frac{U_n}{5 + 8U_n}} + 2 = \frac{5 + 8U_n}{U_n} + 2$$

$$= \frac{5}{U_n} + \frac{8U_n}{U_n} + 2 = \frac{5}{U_n} + 8 + 2 = 5\left(\frac{1}{U_n} + 2\right)$$

**D'où  $V_{n+1} = 5V_n$**

$(V_n)$  est une suite géométrique de raison 5 de premier terme  $V_0 = \frac{1}{U_0} + 2 = 3$

$$V_n = V_0 \times 5^n$$

**D'où  $V_n = 3 \times 5^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$**

b - Montrer que  $U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$  et

en déduire  $\lim U_n$

$$V_n = \frac{1}{U_n} + 2 \Leftrightarrow \frac{1}{U_n} = V_n - 2$$

a  $\Leftrightarrow U_n = \frac{1}{V_n - 2} \Leftrightarrow U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2}$

**D'où  $U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$**

On a  $U_n = \frac{1}{3 \times 5^n - 2} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim U_n = \lim \frac{1}{3 \times 5^n - 2} = 0 \quad \text{car } \lim 5^n = +\infty$$

Et  $5 > 1$

**D'où  $\lim U_n = 0$**

**Exercice 3 :** (5 pts)

1) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation :

$$Z^2 - 18Z + 82 = 0$$

$$\Delta = (-18)^2 - 4 \times 1 \times 82 = -4 < 0$$

$$= (2i)^2$$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{18 + 2i}{2} = 9 + i \quad \text{et} \quad z_2 = \bar{z}_1 = 9 - i$$

**D'où  $S = \{9 - i; 9 + i\}$**

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(O; \vec{u}; \vec{v})$ , on considère les points A et B d'affixes respectives  $a = 9 + i$ ,  $b = 9 - i$ ,  $c = 11 - i$

a - Montrer que :  $\frac{c-b}{a-b} = -i$  puis en déduire que le triangle ABC est isocèle et rectangle en B.

$$\frac{c-b}{a-b} = \frac{11-i-9+i}{9+i-9+i} = \frac{2}{2i} = \frac{1}{i} = -i$$

D'où  $\frac{c-b}{a-b} = -i$

On a  $\frac{c-b}{a-b} = -i$  donc

$$\left| \frac{c-b}{a-b} \right| = |-i| \Leftrightarrow \frac{|c-b|}{|a-b|} = 1 \Leftrightarrow \frac{BC}{BA} = 1$$

Donc  $BC = BA$

$$\frac{c-b}{a-b} = \cos \frac{\pi}{2} - i \sin \frac{\pi}{2} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})$$

Donc  $\frac{c-b}{a-b} = \cos(-\frac{\pi}{2}) + i \sin(-\frac{\pi}{2})$

Or  $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv \arg \frac{c-b}{a-b} [2\pi]$

Donc  $(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$  et  $BC = BA$

D'où le triangle ABC est isocèle et rectangle en B

b - Ecrire  $4(1-i)$  sous forme trigonométrique

$$|4(1-i)| = 4|1-i| = 4\sqrt{2}$$

$$4(1-i) = 4\sqrt{2} \left( \frac{1}{\sqrt{2}} - i \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = 4\sqrt{2} \left( \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

$$4(1-i) = 4\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right) = 4\sqrt{2} \left( \cos(-\frac{\pi}{4}) + i \sin(-\frac{\pi}{4}) \right)$$

D'où  $4(1-i) = \left[ 4\sqrt{2}; -\frac{\pi}{4} \right]$

c - Montrer que :  $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$

puis en déduire que  $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

$$a = 9 + i, b = 9 - i, c = 11 - i$$

$$(c-a)(c-b) = (11-i-9-i)(11-i-9+i) = (2-2i)2 = 4(1-i)$$

D'où  $(c-a)(c-b) = 4(1-i)$

$$|(c-a)(c-b)| = |4(1-i)| \Leftrightarrow |(c-a)||c-b| = 4\sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow |(c-a)||c-b| = 4\sqrt{2} \Leftrightarrow AC \times BC = 4\sqrt{2}$$

D'où  $AC \times BC = 4\sqrt{2}$

d - Soit z l'affixe de point M du plan et z' l'affixe du point M' image du point M par la rotation de centre B et d'angle  $\frac{3\pi}{2}$ . Montrer que  $z' = -iz + 10 + 8i$  puis

$$R(M) = M' \Leftrightarrow z' - b = e^{i\frac{3\pi}{2}} (z - b)$$

$$z' - b = e^{i\frac{3\pi}{2}} (z - b)$$

$$\Leftrightarrow z' - b = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)(z - b)$$

$$z' = -i(z - 9 + i) + 9 - i \Leftrightarrow z' = -iz + 9i + 1 + 9 - i$$

D'où  $z' = -iz + 10 + 8i$

Vérifier que l'affixe du point C' image du point C par la rotation R est  $9 - 3i$

$$R(C) = C' \Leftrightarrow c' = -ic + 10 + 8i$$

$$\Leftrightarrow c' = -i(11-i) + 10 + 8i$$

$$\Leftrightarrow c' = -11i - 1 + 10 + 8i = 9 - 3i$$

D'où  $c' = 9 - 3i$

**Problème :** (9,5 pts)

**Partie I**

On considère la fonction g définie sur  $\mathbb{R}$  par :

$$g(x) = (1-x)e^x - 1$$

1) a - Montrer que  $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = (1-x)'e^x + (1-x)(e^x)'$$

$$g'(x) = -e^x + (1-x)e^x = e^x(-1+1-x)$$

D'où  $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b - Montrer que g est décroissante sur  $[0, +\infty[$  et croissante sur  $]-\infty; 0]$  puis vérifier que  $g(0) = 0$

On a  $g'(x) = -xe^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$  le signe de  $g'(x)$  est celui de  $-x$  car  $e^x > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$   
 $\forall x \in [0, +\infty[$  donc  $x \geq 0 \Leftrightarrow -x \leq 0$  donc  $g'(x) \leq 0$

g est décroissante sur  $[0, +\infty[$

$\forall x \in ]-\infty; 0]$  donc  $x \leq 0 \Leftrightarrow -x \geq 0$  donc  $g'(x) \geq 0$

g est croissante sur  $]-\infty; 0]$

Vérifier que  $g(0) = 0$

$$g(0) = (1-0)e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

D'où  $g(0) = 0$

2) En déduire que  $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

On a g est continue sur  $\mathbb{R}$

Puisque g est décroissante sur  $[0, +\infty[$  et

croissante sur  $]-\infty; 0]$  donc  $g(0)$  est le maximum

de g sur  $\mathbb{R}$  c'est-à-dire  $g(x) \leq g(0) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

or  $g(0) = 0$

D'où  $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

## Partie II

On considère la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}$  par

$$f(x) = (2 - x)e^x - x$$

$(C_f)$  est la courbe représentative de  $f$  dans le repère orthonormé  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  (unité : 1 cm)

1) a – Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$

Car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x)e^x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$$

b – Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$  puis en déduire

que  $(C_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction à déterminer.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 - x)e^x - x}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(2 - x)e^x}{x} - \frac{x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) \frac{e^x}{x} - 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) \frac{e^x}{x} - 1 = -\infty$$

Car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2 - x) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

D'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

2) a – Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$  et calculer

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x \quad (\text{On sait que } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - x)e^x - x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x - x = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x - x + x$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - xe^x = 0$$

Car  $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$

D'où  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$

b – Montrer que la droite  $(D) : y = -x$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$

On a  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (-x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) + x = 0$

D'où la droite  $(D) : y = -x$  est une asymptote oblique à  $(C_f)$  au voisinage de  $-\infty$

3) a – Montrer que  $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f(x) = (2 - x)e^x - x$$

$$f'(x) = (2 - x)'e^x + (2 - x)(e^x)' - 1$$

$$f'(x) = -e^x + (2 - x)e^x - 1 = e^x(-1 + 2 - x) - 1$$

$$f'(x) = e^x(1 - x) - 1 = g(x)$$

D'où  $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b – Interpréter géométriquement le résultat  $f'(0) = 0$

On a  $f'(0) = g(0) = 0$  donc  $(C_f)$  admet une tangente horizontale au point d'abscisse 0

c – Montrer que  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$  et dresser le tableau des variations de

On a  $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$  et  $g(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$   
Donc  $f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

D'où  $f$  est strictement décroissante sur  $\mathbb{R}$ .

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| X       | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | —         |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $-\infty$ |

4) Montrer que  $(C_f)$  possède un seul point d'inflexion de coordonnées  $(0; 2)$

On a  $f'(x) = g(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Donc  $f''(x) = g'(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$f''(x) \geq 0 \quad \forall x \in ]-\infty; 0]$$

$$f''(x) \leq 0 \quad \forall x \in [0; +\infty[$$

Donc  $(C_f)$  possède un seul point d'inflexion d'abscisse 0 et  $f(0) = 2$

D'où  $(C_f)$  possède un seul point d'inflexion de coordonnées  $(0; 2)$

5) a – A l'aide d'une intégration par parties montrer

que :  $\int_{-1}^0 (2 - x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$

$$\int_{-1}^0 (2 - x)e^x dx$$

$$u(x) = 2 - x \quad u'(x) = -1$$

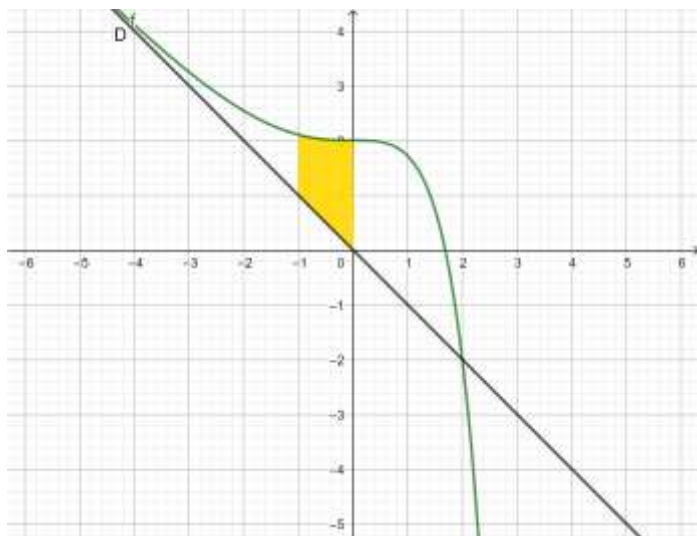
$$v'(x) = e^x \quad v(x) = e^x$$

$$\int_{-1}^0 (2 - x)e^x dx = \left[ (2 - x)e^x \right]_{-1}^0 - \int_{-1}^0 -e^x dx$$

$$\int_{-1}^0 (2 - x)e^x dx = 2 - 3e^{-1} + \left[ e^x \right]_{-1}^0 = 2 - \frac{3}{e} + 1 - \frac{1}{e}$$

D'où  $\int_{-1}^0 (2 - x)e^x dx = 3 - \frac{4}{e}$

b – En déduire en  $\text{cm}^2$  l'aire du domaine limité par  $(C_f)$ , la droite  $(D)$  et les droites d'équations  $x = -1$  et  $x = 0$ .



On sait que la courbe  $(C)$  est au-dessus de la droite  $(D)$  sur l'intervalle  $[-1; 0]$

$$A = \int_{-1}^0 f(x) - (-x) dx \text{ cm} \times \text{cm}$$

$$A = \int_{-1}^0 f(x) + x dx \text{ cm}^2$$

$$A = \int_{-1}^0 (2 - x)e^x dx \text{ cm}^2 = \left(3 - \frac{4}{e}\right) \text{ cm}^2$$

$$\text{D'où } A = \left(3 - \frac{4}{e}\right) \text{ cm}^2$$