

Exercice 1 : (2010 S1) (3pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On considère les points $A(-1, 0, 3)$, $B(3, 0, 0)$ et $C(7, 1, -3)$ et (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

- 1) Montrer que : $\vec{AB} \wedge \vec{AC} = 3\vec{i} + 4\vec{k}$ et en déduire que : $3x + 4z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).
- 2) Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(3, 1, 0)$ et de rayon 5
- 3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que $\begin{cases} x = 3 + 3t \\ y = 1 \\ z = 4t \end{cases} (t \in \mathbb{R})$ est une

représentation paramétrique de la droite (Δ).

- b) Montrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux deux points $E(6, 1, 4)$ et $F(0, 1, -4)$

Exercice 2 : (2010 S1) (3pts)

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : $z^2 - 6z + 10 = 0$
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 3 - i$, $b = 3 + i$; $c = 7 - 3i$. Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

- a) Montrer que : $z' = iz + 2 - 4i$
- b) Vérifier que : l'affixe du point C' l'image du point C par la rotation R est : $c' = 5 + 3i$
- c) Montrer que : $\frac{c' - b}{c - b} = \frac{1}{2}i$ puis en déduire que le

triangle BCC' est rectangle en B et $\vec{BC} = 2\vec{BC}'$

Exercice 3 : (2010 S1) (3pts)

Une caisse contient dix boules : 5 boules blanches, 3 boules rouges et deux boules noires (indiscernables au toucher). On tire au hasard et simultanément quatre boules de la caisse.

- 1) On considère les deux événements :
A" Obtenir une seule boule rouge"
B " Obtenir une boule blanche au moins "
Montrer que $P(A) = \frac{1}{2}$ et $P(B) = \frac{41}{42}$
- 2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de boules rouges tirées.
- a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; 3
- b) Montrer que $P(X = 0) = \frac{1}{6}$ et $P(X = 2) = \frac{3}{10}$
- c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Exercice 4 : (2010 S1) (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$U_{n+1} = \frac{3U_n - 1}{2U_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad U_0 = 2$$

- 1) Montrer que : $U_n - 1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- 2) Soit (V_n) définie par : $V_n = \frac{U_n - 1}{2U_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
- a – Montrer que (V_n) est une suite géométrique de

raison $\frac{1}{2}$ et en déduire que $V_n = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b – Montrer que : $U_n = \frac{V_n - 1}{2V_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

en déduire que $\lim U_n = 1$

3) Calculer $\lim W_n$ telle que (W_n) la suite définie par :

$$W_n = \ln U_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Problème : (2010 S1) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 1 + 4xe^{2x}$$

1) Montrer que $g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) Montrer que g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et

décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

3) a) Montrer que $g(-\frac{1}{2}) = 1 - \frac{2}{e}$ et vérifier que $g(-\frac{1}{2}) > 0$

b) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de \mathbb{R} .

II) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (unité : 2 cm)

1) a – Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad (\text{on rappelle que } \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0)$$

2) Montrer que : $f'(x) = g(x)$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que la la courbe

(C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)]$ en déduire que la

droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la courbe (C) puis montrer que la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right[$ et

qu'elle est au-dessus de la droite (Δ) sur

l'intervalle $\left]\frac{1}{2}; +\infty\right[$

4) a) Montrer que $y = x$ une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O.

b) Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$ (la détermination de l'ordonnée du point

d'inflexion n'est pas demandée)

5) Construire les droites (Δ) et (T) et la courbe (C)

6) a) montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 1)e^{2x} dx = 1 - \frac{e}{2}$

b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par (C), la tangente (T) à (C) et les deux droites $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ est $(6 - 2e)cm^2$