

Exercice 1 : (2010 S1) (3pts)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}}, \vec{\mathbf{k}})$

On considère les points A(-1, 0, 3), B(3, 0, 0) et C(7, 1, -3) et (S) la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 2y - 15 = 0$

1) Montrer que : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 3\vec{\mathbf{i}} + 4\vec{\mathbf{k}}$ et en déduire que : $3x + 4z - 9 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

2) Montrer que (S) est la sphère de centre $\Omega(3, 1, 0)$ et de rayon 5

3) Soit (Δ) la droite passant par Ω et perpendiculaire au plan (ABC).

a) Montrer que $\begin{cases} \mathbf{x} = 3 + 3t \\ \mathbf{y} = 1 \quad (t \in \mathbb{R}) \\ \mathbf{z} = 4t \end{cases}$ est une

représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Montrer que la droite (Δ) coupe la sphère (S) aux deux points E(6, 1, 4) et F(0, 1, -4)

Exercice 2 : (2010 S1) (3pts)

1) Résoudre dans C l'équation : $\mathbf{z}^2 - 6\mathbf{z} + 10 = 0$

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})$ on considère les points A, B et C d'affixes respectives $\mathbf{a} = 3 - \mathbf{i}$, $\mathbf{b} = 3 + \mathbf{i}$; $\mathbf{c} = 7 - 3\mathbf{i}$
Soit z l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Montrer que : $z' = \mathbf{i}z + 2 - 4\mathbf{i}$

b) Vérifier que : l'affixe du point C' l'image du point C par la rotation R est : $\mathbf{c}' = 5 + 3\mathbf{i}$

c) Montrer que : $\frac{\mathbf{c}' - \mathbf{b}}{\mathbf{c} - \mathbf{b}} = \frac{1}{2}\mathbf{i}$ puis en déduire que le

triangle BCC' est rectangle en B et $\mathbf{BC} = 2\mathbf{BC}'$

Exercice 3 : (2010 S1) (3pts)

Une caisse contient dix boules : 5 boules blanches, 3 boules rouges et deux boules noires (indiscernables au toucher).

On tire au hasard et simultanément quatre boules de la caisse.

1) On considère les deux événements :

A " Obtenir une seule boule rouge"

B " Obtenir une boule blanche au moins "

Montrer que $\mathbf{P(A)} = \frac{1}{2}$ et $\mathbf{P(B)} = \frac{41}{42}$

2) Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage associer le nombre de boules rouges tirées.

a) Vérifier que les valeurs prises par X sont 0 ; 1 ; 2 ; 3

b) Montrer que $\mathbf{P(X = 0)} = \frac{1}{6}$ et $\mathbf{P(X = 2)} = \frac{3}{10}$

c) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X

Exercice 4 : (2010 S1) (3pts)

On considère la suite (U_n) définie par :

$$\mathbf{U}_{n+1} = \frac{3\mathbf{U}_n - 1}{2\mathbf{U}_n} \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_0 = 2$$

1) Montrer que : $\mathbf{U}_n - 1 > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

2) Soit (V_n) définie par : $\mathbf{V}_n = \frac{\mathbf{U}_n - 1}{2\mathbf{U}_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que (V_n) est une suite géométrique de

raison $\frac{1}{2}$ et en déduire que $\mathbf{V}_n = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

b) Montrer que : $\mathbf{U}_n = \frac{\mathbf{V}_n - 1}{2\mathbf{V}_n - 1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$
en déduire que $\lim \mathbf{U}_n = 1$

3) Calculer $\lim \mathbf{W}_n$ telle que (W_n) la suite définie par :

$$\mathbf{W}_n = \ln \mathbf{U}_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Problème : (2010 S1) (8pts)

I) On considère la fonction g définie sur \mathbb{R} par :

$$g(x) = 1 + 4xe^{2x}$$

1) Montrer que $g'(x) = 4(2x + 1)e^{2x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) Montrer que g est croissante sur $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right]$ et décroissante sur $\left]-\infty; -\frac{1}{2}\right]$.

3) a) Montrer que $g\left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - \frac{2}{e}$ et vérifier que $g\left(-\frac{1}{2}\right) > 0$

b) En déduire que $g(x) > 0$ pour tout x de \mathbb{R} .

II) On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$f(x) = (2x - 1)e^{2x} + x + 1$$

(C_f) est la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(\mathbf{O}; \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ (unité : 2 cm)

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ puis montrer que

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ (on rappelle que $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0$)

2) Montrer que : $f'(x) = g(x)$ puis en déduire que la fonction f est strictement croissante sur \mathbb{R}

3) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et en déduire que la la courbe

(C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe des ordonnées

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - (x + 1)]$ en déduire que la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

c) Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite (Δ) et la courbe (C) puis montrer que la courbe (C) est en dessous de la droite (Δ) sur l'intervalle $\left]-\infty; \frac{1}{2}\right]$ et qu'elle est au-dessus de la droite (Δ) sur

l'intervalle $\left[\frac{1}{2}; +\infty\right]$

4) a) Montrer que $y = x$ une équation cartésienne de la droite (T) tangente à la courbe (C) au point O.

b) Montrer que la courbe (C) possède un point d'inflexion d'abscisse $-\frac{1}{2}$ (la détermination de l'ordonnée du point d'inflexion n'est pas demandée)

5) Construire les droites (Δ) et (T) et la courbe (C)

6) a) montrer que : $\int_0^{\frac{1}{2}} (2x - 1)e^{2x} dx = 1 - \frac{e}{2}$

b) Montrer que l'aire du domaine plan limité par (C), la tangente (T) à (C) et les deux droites $x = 0$ et $x = \frac{1}{2}$ est $(6 - 2e)\text{cm}^2$