Lycée Tamellalt | Année Scolaire :2021-2022

Devoir Surveillé 1

Niveau : 2BacSP | Prof : Abdessamad Rouchad

Exercice I :

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}\left(2-e^{2x}\right)-x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i};\vec{j})$ (Unité : 2 cm)

1) Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$
2) a) Démontrer que la droite (Δ) d'équation $y=-x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.
   b) Résoudre l'équation $2-e^{2x}=0$, puis montrer que la courbe (C) est au-dessus de (Δ) sur l'intervalle $]-\infty,\frac{\ln 2}{2}]$ et en dessous de (Δ) sur l'intervalle $[\frac{\ln 2}{2},+\infty[$.
3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ puis interpréter géométriquement le résultat.
4) a) Montrer que pour tout x de $\mathbb{R}$, $f'(x)=-\left(2e^{2x}-1\right)^2$
   b) Dresser le tableau de variations de la fonction f.
5) Montrer que $A\left(-\frac{\ln 2}{2},\frac{\ln 2}{2}+\frac{3}{4}\right)$ est un point d' inflexion de (C).
6) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α telle que $0<\alpha<\frac{\ln 2}{2}$
7) Construire (Δ) et (C) dans le repère $(O,\vec{i};\vec{j})$ ci-dessus (On prendra $-\frac{\ln 2}{2}\approx-0,35$ et $\frac{3}{4}+\frac{\ln 2}{2}\approx 1,1$)
8) a) Montrer que la fonction f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$.
   b) Construire dans le même repère $(O,\vec{i},\vec{j})$ la courbe représentative de la fonction f^{-1} (Remarquer que la droite (Δ) est perpendiculaire à la première bissectrice $y=x$)
   c) Calculer $\left(f^{-1}\right)'(1)$ (Remarquer que $f^{-1}(1)=0$)

Exercice II :

1) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, on considère l'équation : $(E) : z^2-6(1-\sqrt{3})z+72=0$
   a) Vérifier que le discriminant de l'équation (E) est $\Delta=-36(\sqrt{3}+1)^2$
   b) En déduire les solutions de l'équation (E).
2) Soient les nombres complexes $a=3(1-\sqrt{3})-i3(\sqrt{3}+1), b=-\sqrt{3}+i\sqrt{3}$ et $c=-\sqrt{3}-3i$
   a) Vérifier que $b\bar{c}=a$, puis en déduire que $ac=12b$
   b) Écrire les nombres complexes b et c sous forme exponentielle.
   c) En déduire que $a=6\sqrt{2}e^{-i\frac{7\pi}{12}}$
3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points B, C et D d'affixes respectives b, c et d telle que D est l'image de B par l'homothétie h de centre O et du rapport $\sqrt{2}$. Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe de M' image de M par la rotation R de centre O et d'angle $\frac{-7\pi}{12}$
   a) Déterminer d l'affixe de D
   b) Vérifier que $z'=\frac{\sqrt{2}}{12}az$
   c) Déterminer l'image du point C par la rotation R
   d) Déterminer la nature du triangle ODC.