Groupe scolaire Inisse

Devoir surveillé N° 4

2^{eme} pc : fr

EXERCICE 1 : $(10\,pts)$

1,5 pts A) a) Montrer que ; $(\forall x \in \mathbb{R})$ $\quad \dfrac{1-e^{-x}}{1+e^{-x}} = 1 - \dfrac{2}{1+e^{x}}$

A) b) Simplifier le nombre : $E = \dfrac{e^{1-\ln(2)}}{e^{1+\ln(2)}}$

4 pts B) Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et les inéquations suivantes :

a) $e^{\frac{1}{x}} = e^{x}$, b) $3e^{2x} - e^{x} - 2 = 0$, c) $2^{x+1} = 8$, d) $1 - 2e^{x} \prec 0$

4,5 pts C) Calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to-\infty} e^{-x} + 2 \;\; ; \;\; \lim_{x\to0} \frac{e^{2x}-1}{x} \;\; ; \;\; \lim_{x\to-\infty} \left(x^{2}-x\right)e^{2x} \;\; ; \;\; \lim_{x\to+\infty} e^{2x} - e^{x} + 4$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\ln\left(1+e^{x}\right)}{e^{x}} \;\; ; \;\; \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{x}}{1+x^{2}}$$

EXERCICE 2 : $(4,5\,pts)$

1pt 1) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation : $z^{2} - 4z + 8 = 0$

2) On considère dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé directe $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$

Les points A, B, C et D d'affixes respectivement : $a = 2 + 2i$, $b = 2 - 2i$

$$c = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad \text{et} \quad d = \left(1-\sqrt{3}\right) + i\left(1+\sqrt{3}\right)$$

1pt a) Ecrire chacun des nombres b et c sous la forme trigonométrique

0,5 pts b) Vérifier que : $bc = d$

0,5pts c) Déduire l'argument du nombre complexe d

1,5 pts d) Soit le point E l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$

Montrer que l'affixe du point E est $e=-2-2i$ puis montrer que le triangle ABE est Rectangle et isocèle en B

EXERCICE 3 : $(5,5pts)$

Partie 1 : On considère la fonction numérique g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x)=e^{x}-x$

0,5 pts 1) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} g(x)$

1 pt 2) Calculer $g'(x)$ pour tout x appartenant à $\mathbb{R}$, puis donner le tableau de variation de g

0,5 pts 3) Déduire que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad g(x)\succ 0$

Partie 2 Soit f la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x)=2e^{x}-x^{2}-1$

Soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$

0,5 pts 1) Calculer $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto-\infty} \frac{f(x)}{x}$

0,5 pts 2) Calculer ; $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\mapsto+\infty} \frac{f(x)}{x}$

(Remarquer que : $(\forall x\succ 0)\quad f(x)=x^{2}\left(2\frac{e^{x}}{x^{2}}-1\right)-1$)

0,5 pts 3) Déterminer les branches infinies de (C_f)

0,5 pts 4) a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x\in\mathbb{R})\quad f'(x)=2g(x)$

0,5 pts b) Donner le tableau de variation de f

0,5 pts c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $]-0,6,-0,3[$

0,5 pts d) Représenter (C_f) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$