G★★A

امتحان نهاية الدورة الاولى
فبراير 2019
مجموعة مدارس انيس

Inisse Groupe scolaire

المـــــادة:	الرياضيات	المعامل:	7
الشعـــب(ة): أو المسلك	شعبة العلوم التجريبية -علوم فيزيائية – خيار فرنسية	مدة الإنجاز:	3س

معلومات عامة

- يسمح باستعمال الآلة الحاسبة غير القابلة للبرمجة؛
- مدة إنجاز موضوع الامتحان: **3** ساعات
- عدد الصفحات: (الصفحة الأولى تتضمن معلومات والصفحتان المتبقيتان تتضمنان الموضوع)؛
- يمكن للمترشح إنجاز تمارين الامتحان حسب الترتيب الذي يناسبه؛
- في حالة عدم تمكن المترشح من الإجابة عن سؤال ما، يمكنه استعمال نتيجة هذا السؤال لمعالجة الأسئلة الموالية؛
- ينبغي تفادي استعمال اللون الأحمر عند تحرير الأجوبة؛
- بالرغم من تكرار بعض الرموز في أكثر من تمرين، فكل رمز مرتبط بالتمرين المستعمل فيه ولا علاقة له بالتمارين السابقة أو اللاحقة.

معلومات خاصة

- يتكون الموضوع من ثلاثة تمارين مستقلة فيما بينها وتتوزع حسب المجالات كما يلي:

التمرين	المجال	النقطة الممنوحة
التمرين الأول	المتتاليات العددية	4نقط
التمرين الثاني	الأعداد العقدية	5نقط
التمرين الثالث	دراسةوتمثيل دالة عددية	11نقط

-بالنسبة للتمرين الثالث ، $\ln$ يرمز لدالة اللوغاريتم النبيري

Examen de fin du 1^er^ semestre -Février 2019 -Mathématiques

Exercice n°1 (4 pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\geq 0}$ définie par : $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \dfrac{10u_n - 81}{u_n - 8}$ pour tout n de IN

0.5 1) a) Montrer que : $(\forall n \in IN)$; $u_n > 9$

0.75 b) Montrer que $(u_n)_{n\geq 0}$ est strictement décroissante et déduite que $(u_n)_{n\geq 0}$ est convergente

2) On pose pour tout n de IN : $v_n = \dfrac{1}{u_n - 9}$

0.5 a) Montrer que : $(\forall n \in IN)$; $v_n \geq 1$

0.75 b) Prouver que $(v_n)_{n\geq 0}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$

0.75 c) Vérifier que $u_n = \dfrac{9v_n + 1}{v_n}$ puis déduit u_n en fonction de n et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

0.75 3) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n - 8)}{u_n - 9}$

Exercice n°2 (3 pts)

1 1)a) Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 6z + 12 = 0$

(On appelle z_1 et z_2 les solutions de l'équation tel que $\operatorname{Im}(z_1) > 0$)

0.5 b) Ecrire sous forme trigonométrique les solutions z_1 et z_2

0.5 c) Ecrire sous forme algébrique le nombre complexe z_1^{2019}

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le point A d'affixe $z_A = 3 + i\sqrt{3}$

Soit z l'affixe d'un point M du plan et z' l'affixe du point M', image de M par la rotation R de centre le point O et d'angle $\dfrac{\pi}{6}$

0.5 a) Donner l'écriture complexe de la rotation R

0.5 b) Vérifier que l'affixe du point B image du point A par la rotation R est $z_B = \sqrt{3} + 3i$

3) Soit I milieu de $[AB]$ et C le symétrique de O par rapport au point I

0.5 a) Montrer que : $z_c = (3 + \sqrt{3})(1 + i)$

1 b) Montrer que $OACB$ est un losange

0.5 c) Déduite une mesure de l'angle $(\overrightarrow{CI}, \overrightarrow{CA})$

Examen de fin du 1er semestre -Février 2019 -Mathématiques

Exercice n°3 (11 pts)

I. Soit g **la fonction numérique définie sur** $I =]0,+\infty[$ **par :** $g(x) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{1}{2}\ln x - 1$

0.5 **1) a) Calculer** $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)$ **et** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$

0.5 **b) Calculer** $g'(x)$ **puis déduire que** g **est strictement décroissante sur** I

0.75 **2) Calculer** $g(1)$ **puis déduie le signe de** $g(x)$ **sur chacun des intervalles** $]0,1]$ **et** $[1,+\infty[$

0.5 **3) a) Montrer que** g **admet une fonction réciproque** g^{-1} **définie un intervalle** J **que l'on déterminera**

0. 5 **b) Calculer** $\left(g^{-1}\right)'(0)$

II. On considère la fonction numérique f **définie sur** $I =]0,+\infty[$ **par :** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x+1} - \dfrac{1}{2}\ln x$

Soit (C_f) **la courbe représentative de** f **dans un repère orthonormé** $(O,\vec{i},\vec{j})$

0.5 **1) a) Calculer** $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ **puis donner une interprétation géométrique du résultat obtenu**

0.75 **b) Montrer que :** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **puis calculer** $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

0.5 **c) Calculer** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x$ **puis dédui que** (C_f) **admet une branche parabolique dont on déterminera la direction**

0.5 **2) a) Montrer que :** $f(x) - x = g(x)$ **pour tout** x **de** I **.**

0. 5 **b) Déduire que** $f(x) < x$ **pour tout** x **de** $]1,+\infty[$

1 **3) a) Montrer que** f **est dérivable sur** I **et que** $f'(x) = \dfrac{(x-1)(2x^2+5x+1)}{2x(x+1)^2}$ **pour tout** x **de** I **.**

0.5 **b) Dresser le tableau de variations de** f **sur** I

1 **c) Construire, dans le même repère** $(O,\vec{i},\vec{j})$**, la droite** (Δ) **d'équation** $y = x$ **et la courbe** (C_f)

1 **d) Montrer que l'équation** $(x+1)\ln\sqrt{x} = x^2 - 2019x - 2018$ **admet un seule solution sur** $[1,+\infty[$

III.On considère la suite numérique (u_n) **définie par :** $u_0 = 2$ **et** $u_{n+1} = f(u_n)$

0.5 **1) a) Montrer que :** $u_n > 1$ **pour tout** n **de** IN

0.75 **b) Etudier la monotonie de** (u_n) **puis déduit que** $u_n \in]1,2]$ **pour tout** n **de** IN

0.75 **2) Montrer que la suite** (u_n) **est convergente et déterminer sa limite**