Lycée Tamellalt — Année Scolaire :2021-2022

Devoir Surveillé 2

Niveau : 2BacSP — Prof : Abdessamad Rouchad

Partie I :

Soit la fonction f définie par :

$$f(x) = x(\sqrt{x}-2)^2$$

1) a) Déterminer D_f
   b) Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et déduire la branche infinie de (C_f) au voisinage de $+\infty$.
2) a) Étudier la dérivabilité de f en 0^+, puis interpréter le résultat géométriquement.
   b) Écrire l'équation de (T) la demi-tangente à (C_f) au point d'abscisse 0, à droite.
3) a) Étudier la dérivabilité de f sur D_f, et montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f'(x) = 2(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}-1)$$

   .
   b) Calculer $f'(4)$ et $f'(1)$ puis interpréter géométriquement chacun des résultats.
   c) Dresser le tableau de variation de f.
4) a) Montrer que (C_f) coupe l'axe (OX) en deux points A et B. à déterminer.
   b) Étudier la position relatives de (C_f) et l'axe des abscisses.
5) a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}^+) : f(x) - x = x(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-3)$$

   b) Déduire que (C_f) coupe la droite $(D) : y = x$ en trois points A ; E et F.
   c) Étudier la position relative de (C_f) et la droite (D).
6) a) Montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}_+^*) : f''(x) = \frac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$$

   b) Déduire la concavité de (C_f) et montrer que (C_f) admet un point d'inflexion I et donner ses coordonnées.
7 Tracer dans le même repère : la demi-tangente (T), la droite (D) et la courbe (C_f).

Partie II :

On définie la suite (u_n) par :

$$(\forall n \in \mathbb{N}) : u_{n+1} = f(u_n) \text{ et } u_0 = \frac{1}{2}$$

1) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) : 0 \leq u_n \leq 1$
2) Montrer que (u_n) est croissante et qu'elle est convergente.
3) Calculer la limite de la suite (u_n)