

مستوى: السنة الثانية من سلك البكالوريا

شعبة العلوم التجريبية

- مسلك علوم الحياة و الأرض
- مسلك العلوم الفيزيائية
- مسلك العلوم الزراعية

مذكرة رقم 13 في درس الجداء المتجهي

القدرات المنتظرة

- حساب مساحة مثلث باستعمال الجداء المتجهي
- تحديد معادلة مستوى محدد بثلاثة نقط غير مستقيمية
- تطبيق الجداء المتجهي في حل مسائل هندسية و فزيائية

محتوى الدرس

- توجيه الفضاء-ثلاثي الأوجه-المعلم و الأساس الموجهان
- تعريف هندسي للجداء المتجهي و تأويل منظمه
- الصيغة التحليلية للجداء المتجهي لمتجهتين
- استقامية متجهتين
- مسافة نقطة عن مستقيم ومساحة مثلث ومتوازي الأضلاع

3) الأساس و المعلم الموجهان:

تعريف: ليكن $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ معلما في الفضاء. نضع $\vec{i} = \overrightarrow{OI}$ و

$$\vec{j} = \overrightarrow{OJ} \text{ و } \vec{k} = \overrightarrow{OK}$$

نقول إن الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشر إذا كان ثلاثي الأوجه

$(OI; OJ; OK)$ مباشرا.

نقول إن المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشر إذا كان الأساس $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ مباشرا.

نقول إن الفضاء موجه توجيهها مباشرا (أو موجبا) إذا كان منسوبها لمعلم مباشر.

فيما تبقى من فقرات الدرس. نعتبر أن الفضاء موجه توجيهها مباشرا

II. تعريف هندسي للجداء المتجهي و تأويل منظمه:

تعريف: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين في الفضاء الموجه.

الجداء المتجهي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ في هذا الترتيب، هو المتجهة التي نرمز لها بالرمز $\vec{u} \wedge \vec{v}$ و المعرفة بما يلي:

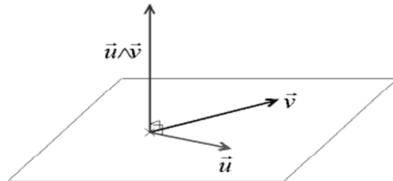
1. إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ مستقيمتين فان: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$
2. إذا كانت $\vec{u}$ و $\vec{v}$ غير مستقيمتين فان $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w}$ بحيث:

$$\vec{w} \perp \vec{u} \text{ و } \vec{w} \perp \vec{v}$$

$$(\vec{u}; \vec{v}; \vec{w}) \text{ أساس مباشر,}$$

$$\|\vec{w}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta$$

حيث θ قياس للزاوية الهندسية BAC مع $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ و $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.



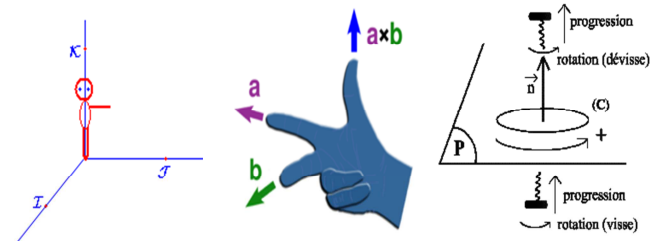
I. توجيه الفضاء-ثلاثي الأوجه-المعلم و الأساس

الموجهان:

1) ثلاثي الأوجه:

تعريف: ثلاثة أنصاف مستقيمات في الفضاء لها نفس الأصل O و غير مستوائية تكون في هذا الترتيب ثلاثي أوجه، نرمز له بالرمز $(Ox; Oy; Oz)$. $[Ox]$ و $[Oy]$ و $[Oz]$ تسمى أحرف ثلاثي الأوجه $(Ox; Oy; Oz)$.

2) توجيه الفضاء:



ليكن $(Ox; Oy; Oz)$ ثلاثي أوجه: رجل أمبير لثلاثي الأوجه

$(Ox; Oy; Oz)$, هو شخص خيالي محمول على الحرف $[Oz]$,

قدماه في

النقطة O , و ينظر إلى الحرف $[Ox]$, بالنسبة لرجل أمبير هناك

وضعتان للحرف $[Oy]$.

الحرف $[Oy]$ عن يساره و الحرف $[Oy]$ عن يمينه

اصطلاحيا، نقول إن الثلاثي الأوجه $(Ox; Oy; Oz)$ مباشر (أو

موجب) إذا كان رجل أمبير محمولا على $[Oz]$ و قدماه في النقطة O

و ينظر إلى الحرف $[Ox]$ و يكون الحرف $[Oy]$ عن يساره.

مثال :

أحسب $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\|$ إذا علمت أن: $\left(\vec{u}; \vec{v}\right) = \frac{\pi}{3}$ و $\|\vec{u}\| = 1$ و $\|\vec{v}\| = 3$

الجواب : $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \theta = 1 \cdot 3 \sin \frac{\pi}{3} = 3 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2}$

نتائج: لكل متجهة $\vec{u}$ من الفضاء، لدينا: $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$ و $\vec{u} \wedge \vec{0} = \vec{0}$

$$\vec{0} \wedge \vec{u} = \vec{0}$$

III. خاصيات الجداء المتجهي

خاصية: لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات من الفضاء و k عددا حقيقيا، لدينا:

$$\vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k(\vec{u} \wedge \vec{v}) \quad \vec{v} \wedge \vec{u} = -(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$(k\vec{u}) \wedge \vec{v} = k(\vec{u} \wedge \vec{v})$$

$$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$$

$$(\vec{u} + \vec{v}) \wedge \vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{w} + \vec{v} \wedge \vec{w}$$

خاصية: تكون $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين مستقيمتين في الفضاء إذا وفقط إذا كان: $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$

مثال ليكن $ABCDEFGH$ مكعبا و M و N النقطتين المعرفتين

$$\vec{AM} = \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE} \quad \vec{AN} = -\frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$(1) \text{ بين أن : } \vec{NG} = \vec{AD} + \vec{AE} + \frac{3}{2}\vec{AB} \quad \text{و} \quad \vec{NM} = \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$(2) \text{ أحسب : } \vec{NM} \wedge \vec{NG}$$

(3) ماذا تستنتج ؟

$$\text{أجوبة : (1)} \quad \vec{NM} = \vec{AM} - \vec{AN} = \frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB}$$

$$\vec{NG} = \vec{BG} - \vec{BN} = \vec{AH} - (\vec{AN} - \vec{AB})$$

$$\vec{NG} = \vec{AD} + \vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB} + \vec{AB} = \vec{AD} + \vec{AE} + \frac{3}{2}\vec{AB}$$

$$\vec{NM} \wedge \vec{NG} = \left(\frac{1}{3}\vec{AD} + \frac{1}{3}\vec{AE} + \frac{1}{2}\vec{AB}\right) \wedge \left(\vec{AD} + \vec{AE} + \frac{3}{2}\vec{AB}\right) \quad (2)$$

لدينا $\vec{AD} \wedge \vec{AD} = \vec{0}$ و $\vec{AE} \wedge \vec{AE} = \vec{0}$ و $\vec{AB} \wedge \vec{AB} = \vec{0}$ اذن :

$$\vec{NM} \wedge \vec{NG} = \frac{1}{3}(\vec{AD} \wedge \vec{AE}) + \frac{1}{2}\vec{AB} \wedge \vec{AD} + \frac{1}{2}\vec{AB} \wedge \vec{AE} = \vec{0}$$

(3) نستنتج أن المتجهتين $\vec{NG}$ و $\vec{NM}$ مستقيمتين

وبالتالي النقط : M و N و G مستقيمية

IV. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي لمتجهتين

إحداثيات الجداء المتجهي بالنسبة لأساس متعامد ممنظم مباشر :

خاصية: الفضاء منسوب إلى أساس متعامد ممنظم مباشر $(\vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$.

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين من الفضاء، إحداثياتهما $\vec{u}(x; y; z)$ و $\vec{v}(x'; y'; z')$

على التوالي.

(X; Y; Z) متلوث إحداثيات الجداء المتجهي $\vec{u} \wedge \vec{v}$ بحيث :

$$Z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \quad Y = -\begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \quad X = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & x' \\ z & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

مثال: $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{v} = 2\vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$ أحسب $\vec{u} \wedge \vec{v}$

الجواب : $\vec{u}(1; 1; 1)$ و $\vec{v}(2; 1; 2)$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} - 0\vec{j} - \vec{k} = \vec{i} - \vec{k}$$

تمرين 1: $\vec{u} = \vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$ و $\vec{v} = 3\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$ أحسب $\vec{u} \wedge \vec{v}$

$\vec{u}(1; 2; 1)$ و $\vec{v}(3; -2; -1)$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \vec{k} = 4\vec{j} - 8\vec{k}$$

V. تطبيقات

1. خاصية: مساحة مثلث-مساحة متوازي الأضلاع:

ليكن ABC مثلثا. مساحة المثلث ABC هي: $\frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$.

ليكن $ABCD$ متوازي أضلاع. مساحة $ABCD$ هي:

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|$$

مثال: نعتبر في الفضاء النقط $A(0; 1; 2)$ و $B(1; 1; 0)$ و $C(1; 0; 1)$

1. حدد إحداثيات المتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ تأكد أن النقط A و B و C غير مستقيمية

2. أحسب مساحة المثلث ABC

3. حدد معادلة ديكرتية للمستوى (ABC) .

الجواب (1): $\vec{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

$\vec{AB}(1; 0; -2)$ و $\vec{AC}(1; -1; -1)$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k}$$

$\vec{AB} \wedge \vec{AC} \neq \vec{0}$ ومنه النقط A و B و C غير مستقيمية

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| \quad (2)$$

$$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = -2\vec{i} - 1\vec{j} - 1\vec{k} \quad (3)$$

نعلم أن معادلة المستوى ABC تكتب على الشكل :

$$ax + by + cz + d = 0$$

و نعلم أن $\vec{AB} \wedge \vec{AC}(-2; -1; -1)$ متجهة منظمه عليه اذن :

$$c = -1 \quad b = -1 \quad a = -2$$

$$\text{ومنه : } -2x - 1y - 1z + d = 0 \quad (ABC)$$

و نعلم أن: $A(0; 1; 2) \in (P)$ اذن إحداثيات A تحقق المعادلة :

$$d = 3 \text{ يعني } 0 - 1 - 2 + d = 0$$

$$\text{وبالتالي : } -2x - 1y - 1z + 3 = 0 \quad (ABC)$$

$$\text{يعني : } 2x + y + z - 3 = 0 \quad (ABC)$$

تمرين 2: نعتبر النقط $A(1; 1; 0)$ و $B(2; 3; 4)$ و $C(-1; 0; 3)$

1. حدد إحداثيات المتجهة $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ وبين أن النقط A و B و C غير مستقيمية

2. أحسب مساحة المثلث ABC

3. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

الجواب (1): $\overrightarrow{AB}(x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$

$\overrightarrow{AB}(1; 2; 4)$ و $\overrightarrow{AC}(-2; -1; 3)$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 10\vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ ومنه النقط A و B و C غير مستقيمية

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \quad (2)$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \sqrt{10^2 + (-11)^2 + 3^2} = \sqrt{230}$$

$$S_{ABC} = \frac{\sqrt{230}}{2}$$

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 10\vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}$ متجهة منظمية على المستوى ABC

نعلم أن معادلة المستوى ABC تكتب على الشكل :
 $ax + by + cz + d = 0$

و نعلم أن $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}(10; -11; 3)$ متجهة منظمية عليه اذن :

$$c = 3 \text{ و } b = -11 \text{ و } a = 10$$

ومنه : $10x - 11y + 3z + d = 0$ (ABC)

و نعلم أن : $A(1; 1; 0) \in (P)$ اذن احداثيات A تحقق المعادلة :

$$d = 1 \text{ يعني } 10 - 11 + 0 + d = 0$$

وبالتالي : $10x - 11y + 3z + 1 = 0$ (ABC)

(2) مسافة نقطة عن مستقيم:

خاصية: مسافة نقطة M من الفضاء عن المستقيم (D) المار

من النقطة A و $\vec{u}$ متجهة موجهة له هي : $d(M; D(A; \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

مثال: أحسب مسافة النقطة $M(2; 1; 1)$ عن المستقيم (D) المعروف بما يلي:

$$(D): \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 - 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 4t \end{cases}$$

الجواب: نبحث عن نقطة يمر من المستقيم ومتجهة موجهة له :

$$(D): \begin{cases} x = 1 + 0t \\ y = 1 - 3t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 + 4t \end{cases}$$

لدينا $A(1; 1; 0) \in (D)$ و $\vec{u}(0; -3; 4)$ متجهة موجهة ل (D)

$$\overrightarrow{AM}(1; 0; 1) \text{ و } \vec{u}(0; -3; 4)$$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} \vec{k} = 3\vec{i} - 4\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$d(M; D(A; \vec{u})) = \frac{\|\overrightarrow{AM} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + (-3)^2}}{\sqrt{0^2 + (-3)^2 + 4^2}} = \frac{\sqrt{34}}{\sqrt{25}} = \frac{\sqrt{34}}{5}$$

تمرين 3: أحسب مسافة النقطة $B(0; 1; 2)$ عن المستقيم (D)

المعرف بما يلي:

$$(D): \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 2t \end{cases}$$

الجواب: نبحث عن نقطة يمر من المستقيم ومتجهة موجهة له :

$$(D): \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \quad (t \in \mathbb{R}) \\ z = 0 + 2t \end{cases}$$

لدينا $A(1; 2; 0) \in (D)$ و $\vec{u}(1; -1; 2)$ متجهة موجهة ل (D)

$$B(0; 1; 2) \text{ و } \overrightarrow{AB}(-1; -1; 2)$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = 0\vec{i} + 4\vec{j} + 2\vec{k}$$

$$d(B; D) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} = \frac{\sqrt{0^2 + 4^2 + 2^2}}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{\sqrt{20}}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{10}}{3}$$

تمارين للبحث

التمرين 1: في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر الفلكة (S) التي معادلتها

$$(x-1)^2 + y^2 + z^2 - 2y - 5 = 0$$

1. حدد Ω مركز الفلكة (S) و شعاعها r .

2. نعتبر النقطتين $A(-1; 2; 1)$ و $B(2; -1; 1)$, أحسب مساحة

المثلث $AB\Omega$.

3. حدد معادلة ديكارتية للمستوى المماس للفلكة في النقطة A .

التمرين 2: الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط $A(1; 0; -1)$ و $B(1; 3; -1)$ و

$$C\left(-\frac{1}{3}; 1; 0\right)$$

1. حدد $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ ثم استنتج أن النقط A و B و C غير مستقيمية.

2. حدد معادلة ديكارتية للمستوى (P) المعروف بالنقط A و B و C .

3. لتكن الفلكة (S) ذات الشعاع $r = 1$ و المركز $\Omega(0, 0, 1)$.

أ. أعط معادلة ديكارتية للفلكة (S) .

ب. بين أن الفلكة (S) مماسة للمستوى (P) .

ج. حدد مثلث إحداثيات نقطة التماس.

التمرين 3: في الفضاء $\mathcal{E}$ منسوب إلى معلم متعامد ممنظم مباشر

$(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$. نعتبر النقط $A(5; -1; 2)$ و $B(1; -3; -2)$ و

$$C(-2; -1; 2)$$

1. أحسب $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ ثم استنتج مساحة المثلث ABC .

2. أحسب $\left| \sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) \right|$.

3. أحسب مسافة النقطة B عن المستقيم (AC) .