

الهندسة الفضائية

2 ع ت

الفلكة : $\mathcal{F}$

تعريف : a

لتكن Ω نقطة و $\mathcal{F}$ عددا حقيقيا موجبا قطعاً .
مجموعة النقط M من الفضاء التي تحقق $\Omega M = r$ تسمى الفلكة التي مركزها Ω وشعاعها r ونرمزها بالرمز : $S(\Omega, r)$.
ولدينا : $M \in S \Leftrightarrow \Omega M = r$

b. معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بمركز وشعاع :

معادلة ديكارتية لفلكة مركزها $\Omega(a, b, c)$ وشعاعها r هي
 $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$

c. معادلة ديكارتية لفلكة معرفة بأحد أقطارها :

لتكن S فلكة أحد أقطارها $[AB]$ و M نقطة في الفضاء .
 $M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$
 $(x-x_A)(x-x_B) + (y-y_A)(y-y_B) + (z-z_A)(z-z_B) = 0$

d. دراسة مجموعة النقط التي تحقق : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$

باستعمال المتساوية $x^2 + ax = \left(x + \frac{a}{2}\right)^2 - \frac{a^2}{4}$ نجد أن :

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$
تكافئ $\left(x + \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 + \left(z + \frac{c}{2}\right)^2 = \alpha$

مع $\alpha = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d$

نفصل بين 3 حالات :

إذا كان $\alpha < 0$ فإن E مجموعة فارغة .

إذا كان $\alpha = 0$ فإن E هي الأحادية $\left\{\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)\right\}$.

إذا كان $\alpha > 0$ فإن E فلكة مركزه $\Omega\left(-\frac{a}{2}, -\frac{b}{2}, -\frac{c}{2}\right)$ وشعاعها $\sqrt{\alpha}$.

e. الوضع النسبي لفلكة ومستقيم :

لتكن $S(\Omega, r)$ فلكة مركزها Ω وشعاعها r و (D) مستقيماً في الفضاء
ليكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستقيم (D)
نضع : $d = d(\Omega, (D))$

إذا كان $d > r$ فإن الفلكة والمستقيم لا يتقاطعان

نقول إن المستقيم (D) خارج الفلكة $S(\Omega, r)$

إذا كان $d = r$ فإن المستقيم مماس للفلكة في النقطة H ، يتم تحديد

مثلث إحداثياتها محل أنظمة مكونة من تمثيل بارامتري للمستقيم (D) ومعادلة ديكارتية للمستوى .

نعتبر الفضاء منسوباً إلى M, m, m, m $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

1. الجداء السلمي لمتجهتين :

a. الصيغة التحليلية للجداء السلمي :

إذا كان $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ و $\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}$
فإن : $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

نتيجة : $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v}$

b. منظم متجهة :

منظم متجهة $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ هو العدد الحقيقي الموجب :
 $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

c. المسافة بين نقطتين :

المسافة بين نقطتين A و B هي :
 $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

d. متجهة منظمية على مستوى :

نسمى متجهة منظمية على مستوى P ، كل متجهة غير منعدمة اتجاهها عمودي على المستوى P .

نتيجة :

متجهة منظمية على مستوى معرف بمعادلة $ax + by + cz + d = 0$ هي $\vec{n}(a, b, c)$.

ملاحظة :

كل مستقيم عمودي على مستوى يكون موجهها بمنظمية على هذا المستوى .
تمثيل بارامتري للمستقيم المار من نقطة Ω والعمودي على المستوى P المعروف بالمعادلة $ax + by + cz + d = 0$ هو :

$$\begin{cases} x = x_\Omega + at \\ y = y_\Omega + bt \\ z = z_\Omega + ct \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

e. تحديد معادلة ديكارتية لمستوى مار بنقطة ومتجهة منظمية عليه :

لتكن A نقطة و $\vec{n}$ متجهة غير منعدمة .
يوجد مستوى وحيد P مار من A و $\vec{n}$ منظمية عليه ولدينا :

$$M \in P \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = 0$$

f. تحديد مثلث إحداثيات المسقط العمودي لنقطة على مستوى :

مسقط نقطة Ω على مستوى P هو نقطة تقاطع P مع المستقيم (Δ) المار من النقطة Ω والعمودي على المستوى P . ويتم تحديد مثلث إحداثياتها محل أنظمة مكونة من تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) ومعادلة ديكارتية للمستوى .

الهندسة الفضائية

2ع ت

ملاحظة :

كل مستقيم عمودي على (ABC) يكون موجه بالمتجه $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.

d. مساحة مثلث :

$$S_{ABC} = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{2} : \text{مساحة مثلث } ABC \text{ هي}$$

e. مساحة متوازي الأضلاع :

$$S_{ABCD} = \|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| : \text{مساحة متوازي الأضلاع } ABCD \text{ هي}$$

d. مسافة نقطة عن مستقيم

مسافة نقطة Ω عن مستقيم (D) مار من نقطة A و موجه بمتجه $\vec{u}$ هي

$$d(\Omega; D(A, \vec{u})) = \frac{\|\vec{\Omega A} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$$

e. توازي وتعامد مستويين :

نعتبر مستويين $(P): ax+by+cz+d=0$

$(P'): a'x+b'y+c'z+d'=0$

المتجه $\vec{n}(a,b,c)$ منظمة على (P)

المتجه $\vec{n}(a',b',c')$ منظمة على (P')

$(P) \parallel (P')$. يكافئ $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$ (جدا متجهي)

$(P) \perp (P')$. يكافئ $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ (جدا سلمي)

f. تقاطع مستويين :

نعتبر مستويين متقاطعين (P) و (P') .

لكن $\vec{n}$ متجه منظمة على (P) و $\vec{n}'$ متجه منظمة على (P')

تقاطع المستويين (P) و (P') هو مستقيم موجه بالمتجه $\vec{n} \wedge \vec{n}'$



. إذا كان $d < r$ فإنه يكون للفلكة والمستقيم نقطتان مشتركتان، يتم

تحديد مثلوتي إحداثياتهما بجل نظمة مكونة من تمثيل بارامتري

للمستقيم (D) ومعادلة ديكارتية للمستوى .

نقول إن المستقيم يخترق الفلكة

f. الوضع النسبي لفلكة ومستوى :

لتكن $S(\Omega, r)$ فلكة مركزها Ω وشعاعها r و (P) مستوى من الفضاء

معرف بالمعادلة $ax+by+cz+d=0$.

ليكن H المسقط العمودي للمركز Ω على المستوى (P) .

$$d = (\Omega, (P)) = \frac{|ax_{\Omega} + by_{\Omega} + cz_{\Omega} + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} : \text{نضع}$$

. إذا كان $d > r$ فإنه لا توجد نقطة مشتركة بين $S(\Omega, r)$ و (P) .

. إذا كان $d = r$ فإن L و $S(\Omega, r)$ نقطة وحيدة مشتركة وهي H

نقول إن المستوى (P) تماس للفلكة $S(\Omega, r)$ في H

. إذا كان $d < r$ فإن تقاطع $S(\Omega, r)$ و (P) هو الدائرة التي مركزها

$$H \text{ وشعاعها } r' = \sqrt{r^2 - d^2}$$

ملحوظة 1: إذا كان $d = 0$ أي $\Omega \in (P)$ فإن (P) يقطع $S(\Omega, r)$

وفق دائرة كبرى مركزها Ω وشعاعها r .

ملحوظة 2: يتم تحديد مثلوث إحداثيات النقطة H بجل نظمة مكونة من معادلة

ديكارتية للمستوى و تمثيل بارامتري للمستقيم (Δ) ، المار من Ω والعمودي

على المستوى .

3. الجداء المتجهي :

a. الصيغة التحليلية للجداء المتجهي :

$$\vec{v} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \text{ و } \vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} \text{ إذا كان}$$

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ x' & y' & z' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} y & z \\ y' & z' \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x & z \\ x' & z' \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x & y \\ x' & y' \end{vmatrix} \vec{k}$$

b. استقامية متجهتين

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0} \text{ يكافئ } \vec{u} \text{ و } \vec{v} \text{ مستقيمتان}$$

c. استقامية ثلاث نقط

$$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{0} \text{ مستقيمة يكافئ } A \text{ و } B \text{ و } C$$

نتيجة : منظمة على مستوى (ABC)

لتكن A و B و C نقطا غير مستقيمة .

المتجه $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ منظمة على المستوى (ABC)

$$M \in (ABC) \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$$

ولدينا التكافؤ التالي : $\vec{AM} \cdot (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) = 0$

الذي نستنتج منه معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .