

الجداء المتجهي

المعلم متعامد ممنظم مباشر

- لتكن المتجهتين $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ متجهتين , الجداء المتجهي لهما هي المتجهة $\vec{w}$ ونرمز لها ب $\vec{u} \wedge \vec{v}$ حيث :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{w} \begin{pmatrix} bb' - cc' \\ cc' - aa' \\ aa' - bb' \end{pmatrix}$$

معادلة المستوى (ABC) نحصل عليها من خلال العلاقة

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$S = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|}{2} : \text{مساحة مثلث ABC هي}$$

$$d(A, D) = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \text{ هي مسافة نقطة A عن مستقيم } D(B, \vec{u})$$

- $P(A, \vec{u}, \vec{v})$ مستوى يمر من A وموجه بالمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$

المتجهة $\vec{n} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ متجهة منظمية على (P)

- إذا كان $D = P \cap Q$ فإن المتجهة $\vec{n}$ موجهة ل (D) والعادلتين الديكارتيين ل (D) هما

$$(D) \begin{cases} ax+by+cz+d=0 & (P) \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 & (Q) \end{cases}$$

الفلا

- (S) **فلكة أحد أقطارها** $[AB]$: $M \in S \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$
- (S) **فلكة مركزها** $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها r معادلة (S) هي $(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2 = r^2$
- المعادلة : $x^2 + y^2 + z^2 - 2ax - 2by - 2cz + d = 0$ هي معادلة فلكة مركزها $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 - d}$ (إذا كانت $a^2 + b^2 + c^2 - d > 0$)

- **تمثيل بارامتري لفلكة** مركزها $\Omega(a,b,c)$ وشعاعها R

$$\begin{cases} x = a + R \sin \varphi \cos \alpha \\ y = b + R \sin \varphi \sin \alpha \\ z = c + R \cos \varphi \end{cases} \quad (\varphi, \alpha \in \mathbb{R})$$

- (S) فلكة مركزها Ω وشعاعها r و (P) مستوى .
- $d(\Omega, P) = r \Leftrightarrow S \cap P = \{H\}$ (P) مماس ل (S)
- $d(\Omega, P) > r \Leftrightarrow S \cap P = \emptyset$
- $d(\Omega, P) < r \Leftrightarrow S \cap P = C(H, r')$ حيث C دائرة مركزها H وشعاعها r' مع
- $r' = \sqrt{r^2 - (d(\Omega, P))^2}$ و H هو المسقط العمودي ل Ω على (P)

- (S) فلكة مركزها Ω وشعاعها r و (D) مستقيم
- $d(\Omega, D) = r \Leftrightarrow S \cap D = \{A\}$ o
- $d(\Omega, D) > r \Leftrightarrow S \cap D = \emptyset$ o
- $d(\Omega, D) < r \Leftrightarrow S \cap D = \{A, B\}$

- نحصل على التقاطع بتعويض تمثيل بارامتري (D) في معادلة (P)
- معادلة المماس (P) ل (S) في A نحصل عليها من العلاقة

$$M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AO} = 0$$

المسقط العمودي لنقطة على مستوى

A نقطة من الفضاء و (P) مستوى

$$\begin{cases} \overrightarrow{AH} = t\vec{m}, t \in \mathbb{R} \\ H \in P \end{cases} \Leftrightarrow \text{المسقط العمودي ل A على (P)}$$

الجداء السلمي في الفضاء

- لتكن المتجهتين $\vec{u}(a,b,c)$ و $\vec{v}(a',b',c')$ الجداء السلمي نرمز له ب : $\vec{u} \cdot \vec{v}$ حيث $\vec{u} \cdot \vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} = aa' + bb' + cc'$

المسافة AB

$$AB = \sqrt{(x_A - x_B)^2 + (y_A - y_B)^2 + (z_A - z_B)^2} = \|\overrightarrow{AB}\|$$

متجهة منظمية على مستوى

كل متجهة موجهة لمستقيم عمودي على مستوى (P) تسمى متجهة منظمية على (P) ونرمز لها ب $\vec{n}$

- مجموعة النقط M حيث $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AM} = k$ حيث $\vec{n}$ غير منعدمة و A نقطة معلومة k عدد حقيقي هي مستوى يمر من A ويقبل $\vec{n}$ متجهة منظمية عليه

- مجموعة النقط $M(x, y, z)$ حيث $ax + by + cz + d = 0$ هي مستوى يقبل $\vec{n}(a, b, c)$ منظمية عليه .

- إذا كانت $\vec{n}(a, b, c)$ منظمية على (P) فإن

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow ax + by + cz + d = 0$$

التوازي le parallélisme

نعتبر المستويين (P): $ax + by + cz + d = 0$

(P'): $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$$\left| \frac{ab}{ab'} \right| = \left| \frac{bc}{b'c'} \right| = \left| \frac{ac}{a'c'} \right| = 0 \Leftrightarrow P \parallel P'$$

يكون P و P' متقاطعين اذا وفقط إذا كانت إحدى هذه المحددات غير منعدمة .

نتيجة : كل مستوى مواز للمستوى (P): $ax + by + cz + d = 0$ له معادلة على الشكل : $ax + by + cz + d' = 0$

- مستقيمين $D'(B, \vec{u})(\alpha, \beta, \gamma)$; $D(A, \vec{u})(\alpha, \beta, \gamma)$

$$D \parallel D' \Leftrightarrow \left| \frac{\alpha\alpha'}{\beta\beta'} \right| = \left| \frac{\alpha\alpha'}{\gamma\gamma'} \right| = \left| \frac{\beta\beta'}{\gamma\gamma'} \right| = 0$$

- $P \parallel D \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = 0$ (حيث $\vec{w}, \vec{v}$ موجهتين ل (P))

التعامد l'ortogonalité

نعتبر المستويين (P): $ax + by + cz + d = 0$

(P'): $a'x + b'y + c'z + d' = 0$

$$P \perp P' \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0$$

$$D \perp P \Leftrightarrow \vec{u} = k\vec{n}(a, b, c)$$

توازي وتعامد مستقيم ومستوى

ليكن $D(A, \vec{u})$ و (P) يقبل $\vec{n}$ متجهة منظمية عليه :

$$D \parallel P \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0$$

$$D \perp P \Leftrightarrow \vec{u} \text{ مستقيميتين } \vec{n}$$

مسافة نقطة عن مستوى

(P): $ax + by + cz + d = 0$ و $A(x_0, y_0, z_0)$

$$d(A, P) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$