



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء



الصفحة

درس : المعادلات التفاضلية

I. المعادلة التفاضلية:  $y' = ay + b$

01. تذكير:

- $f$  دالة عددية نرسم لها ب :  $y$ .
- $f'$  الدالة المشتقة ل  $f$  نرسم ل  $f'$  ب :  $y'$ .
- الكتابة  $f'(x) = af(x) + b$  نكتبها على الشكل الآتي  $y' = ay + b$  و تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأولى ذات معاملات ثابتة .
- كل دالة عددية  $g$  قابلة للاشتقاق و تحقق المعادلة السابقة ( أي  $g'(x) = ag(x) + b$  ) تسمى حلا للمعادلة التفاضلية  $y' = ay + b$

02. حل المعادلة:  $y' = ay + b$

| المعادلة التفاضلية على شكل                  | حلول المعادلة هي الدوال $f(x)$ المعرفة على $\mathbb{R}$ و التي هي على شكل | مثال          | الحلول هي                                                    |
|---------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------|---------------|--------------------------------------------------------------|
| $y' = b; b \neq 0$                          | $f(x) = bx + c$ (مع $c \in \mathbb{R}$ )                                  | $y' = 7$      | مع $c \in \mathbb{R}$ $f(x) = 7x + c$                        |
| حالة خاصة $y' = 0$                          | $f(x) = c$ (مع $c \in \mathbb{R}$ )                                       | $y' = 0$      | مع $c \in \mathbb{R}$ $f(x) = c$                             |
| $y' = ay; a \neq 0$                         | $f(x) = c \times e^{ax}$ (مع $c \in \mathbb{R}$ )                         | $y' = 2y$     | مع $c \in \mathbb{R}$ $f(x) = c \times e^{2x}$               |
| $y' = ay + b$<br>و $a, b$ من $\mathbb{R}^*$ | $f(x) = c \times e^{ax} - \frac{b}{a}$ (مع $c \in \mathbb{R}$ )           | $y' = 4y + 5$ | مع $c \in \mathbb{R}$ $f(x) = c \times e^{4x} - \frac{5}{4}$ |

03. برهان ل :  $y' = ay + b = b$  ;  $a=0$

( الدالة المشتقة ثابتة إذن :  $y = f(x) = bx + c$  مع  $c \in \mathbb{R}$  )

04. برهان ل :  $y' = ay$  ;  $a \neq 0$  (1) :

نعتبر دالة  $f$  حل للمعادلة التفاضلية (1) حيث  $f$  معرفة على مجال  $I$  . ومنه :  $\forall x \in I : f'(x) = af(x)$  .

حالة :  $\forall x \in I, f(x) = 0$  . الدالة المنعدمة هي حل لهذه المعادلة التفاضلية (1) مع  $c = 0$  .

حالة :  $\forall x \in I, f(x) \neq 0$  :

إذن :  $a = \frac{f'(x)}{f(x)}$  و بالتالي :  $\ln|f(x)| = ax + c'$  مع  $c' \in \mathbb{R}$  . ( درس الدوال الأصلية ) .

ومنه :  $|f(x)| = e^{ax+c'} = e^{ax} \times e^{c'} = \lambda e^{ax}$  مع  $\lambda = e^{c'} > 0$  من  $\mathbb{R}$  .

ومنه :  $f(x) = \lambda e^{ax} > 0$  أو  $f(x) = -\lambda e^{ax} < 0$  مع  $\forall x \in I, \lambda = e^{c'} > 0$  من  $\mathbb{R}$  .

إذن : يوجد  $x_1$  و  $x_2$  من  $I$  حيث :  $f(x_1) = \lambda e^{ax_1} > 0$  و  $f(x_2) = -\lambda e^{ax_2} < 0$  ؛ حسب مبرهنة القيم الوسطية T.V.I نستنتج

أن : يوجد  $c_0$  من  $I$  حيث  $f(c_0) = 0$  . هذا غير ممكن لأن  $f(x) \neq 0$  ( $\forall x \in I$ )

إذن :  $\forall x \in I, f(x) = \lambda e^{ax}$  أو  $\forall x \in I, f(x) = -\lambda e^{ax}$

باختصار :  $\forall x \in I, f(x) = -ce^{ax}$  مع  $c \in \mathbb{R}$  .

10

درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء

2

الصفحة

درس : المعادلات التفاضلية

05. برهان ل  $y' = ay + b$  ;  $a \neq 0$  : (2)

لدينا :

$$y' = ay + b \Leftrightarrow y' = a \left( y + \frac{b}{a} \right)$$

$$\Leftrightarrow y' = az, \quad z = y + \frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow z' = az, \quad z = y + \frac{b}{a}, \quad z' = \left( y + \frac{b}{a} \right)' = y'$$

حسب البرهان السابق نحصل على : حلول المعادلة التفاضلية :  $z' = az$  هي الدوال التي على شكل :  $z = ce^{ax}$  مع  $c$  من  $\mathbb{R}$ .

$$\text{إذن : } z = ce^{ax} \Leftrightarrow z = y + \frac{b}{a} = ce^{ax} \Leftrightarrow y = ce^{ax} - \frac{b}{a}$$

خلاصة الحل العام ل  $y' = ay + b$  و  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}^*$  : هي الدوال التي على شكل  $f(x) = c \times e^{ax} - \frac{b}{a}$  (مع  $c \in \mathbb{R}$ )

## 06. خاصية :

المعادلة التفاضلية  $y' = ay + b$  مع  $a \neq 0$  تقبل حلا وحيدا  $f$  يحقق الشرط البدني  $f(x_0) = y_0$  مع  $x_0$  و  $y_0$  من  $\mathbb{R}$

II. المعادلة التفاضلية:  $y'' + ay' + by = 0$ 

## 01. تعاريف:

$a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$ .

- المعادلة  $(E): y'' + ay' + by = 0$  حيث المجهول هو دالة  $y$  مع  $y'$  مشتقتها الأولى مع  $y''$  مشتقتها الثانية تسمى معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة.
- كل دالة عددية  $f$  قابلة للاشتقاق مرتين و تحقق المعادلة التفاضلية  $(E)$  تسمى حل خاص للمعادلة التفاضلية  $(E)$
- المعادلة  $r^2 + ar + b = 0$  حيث  $r$  هو المجهول تسمى المعادلة المميزة للمعادلة التفاضلية  $(E): y'' + ay' + by = 0$ .

02. حل المعادلة التفاضلية:  $y'' + ay' + by = 0$ 

مبرهنة مقبولة :

لتكن المعادلة التفاضلية:  $(E): y'' + ay' + by = 0$  و معادلتها المميزة  $r^2 + ar + b = 0$  حيث:  $a$  و  $b$  من  $\mathbb{R}$

و  $\Delta = a^2 - 4b$  المميز للمعادلة المميزة

❖  $\Delta = a^2 - 4b > 0$  إذن المعادلة المميزة  $r^2 + ar + b = 0$  لها حلين حقيقيين  $r_1$  و  $r_2$  فإن حلول المعادلة التفاضلية  $(E)$  هي :

الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $y = f(x) = \alpha e^{r_1 x} + \beta e^{r_2 x}$  مع  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$ .

❖  $\Delta = a^2 - 4b = 0$  إذن المعادلة المميزة  $r^2 + ar + b = 0$  لها حل حقيقي مزدوج  $r_1$  فإن حلول المعادلة التفاضلية  $(E)$  هي :

الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $y = f(x) = (\alpha x + \beta) e^{r_1 x}$  مع  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$ .

❖  $\Delta = a^2 - 4b < 0$  إذن المعادلة المميزة  $r^2 + ar + b = 0$  لها حلين عقديين مترافقين  $r_1 = p + iq$  و  $r_2 = p - iq$  فإن حلول المعادلة

التفاضلية  $(E)$  هي : الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $y = f(x) = (\alpha \cos(qx) + \beta \sin(qx)) e^{px}$  مع  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$ .

10

درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + فيزياء

3

الصفحة

درس : المعادلات التفاضلية

## 03. ملحوظة:

المعادلة التفاضلية:  $y'' + \omega^2 y = 0$  حلولها هي الدوال المعرفة على  $\mathbb{R}$  ب:  $y = f(x) = \alpha \cos(\omega x) + \beta \sin(\omega x)$  ;  $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

## 04. أمثلة :

مثال 1 :

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية :  $y'' - 5y' + 6y = 0$  (E) .

1. اعط المعادلة المميزة ل (E) .

2. أعط حلول المعادلة المميزة .

3. استنتج حلول المعادلة (E) .

جواب :

1. المعادلة المميزة ل (E) :

هي :  $r^2 - 5r + 6 = 0$  (C) .

2. حلول المعادلة هي :

$r_2 = 3$  ,  $r_1 = 2$  ,  $\Delta = 1$

3. نستنتج حلول المعادلة :

الحل العام ل (E) هي الدوال التالي على شكل :  $y = f(x) = \alpha e^{2x} + \beta e^{3x}$  مع  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$  .

مثال 2 :

نعتبر المعادلة التفاضلية التالية :  $y'' + y' + y = 0$  (E) .

1. اعط المعادلة المميزة ل (E) .

2. أعط حلول المعادلة المميزة .

3. استنتج حلول المعادلة (E) .

جواب :

1. المعادلة المميزة ل (E) هي :  $r^2 + r + 1 = 0$  (C) .

2. حلول المعادلة هي :

$r_2 = \bar{r}_1 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = \bar{j}$  ,  $r_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = j$  ,  $\Delta = -3$

3. نستنتج حلول المعادلة :

الحل العام ل (E) هي الدوال التالي على شكل :  $f(x) = \left( \alpha \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + \beta \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) \right) e^{-\frac{1}{2}x}$  مع  $\alpha$  و  $\beta$  من  $\mathbb{R}$  .

## 05. تمرين :

(1) حل المعادلة التفاضلية :  $y' + 2y = 0$  (E)

(2) بين أن :  $y_0 = e^{-3x}$  حل للمعادلة التفاضلية  $y' + 2y = -e^{-3x}$  (E')

(3) حدد الدالة g حل للمعادلة التفاضلية (E') التي تحقق  $g(0) = 2$