

الأعداد العقدية السلسلة 1 (6 تمارين)

التمرين 1:

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$ ، لتكن t الإزاحة ذات المتجهة $\vec{w}$ التي لحقها $a = \sqrt{2} + i\sqrt{6}$. نعتبر النقطة A التي لحقها $z_{\vec{w}} = (2 - \sqrt{2}) + i(2 - \sqrt{6})$

- (1) اعط الكتابة العقدية للإزاحة t
- (2) حدد b لحق النقطة B صورة النقطة A بالإزاحة t
- (3) نضع $c = \frac{a}{b}$. أكتب a و b و c على شكلها المثلثي
- (4) أكتب العدد c على شكله الجبري
- (5) استنتج القيم المضبوطة لـ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$
- (6) أكتب c^{2007} على الشكل الجبري.

التمرين 2:

في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$. (الوحدة $1cm$). نعتبر النقط A و B و S و Ω التي ألحاقها على التوالي: $a = -2 + 4i$ و $b = -4 + 2i$ و $s = -5 + 5i$ و $\omega = -2 + 2i$ و ليكن h التحاكي الذي مركزه S ونسبته 3 و لتكن C صورة A بالتحاكي h و D صورة B بالتحاكي h

- (1) أ. اعط الكتابة العقدية للتحاكي h
ب. بين أن $c = 4 + 2i$ هو لحق النقطة C وأن $d = -2 - 4i$ هو لحق النقطة D
ج. بين أن النقط A و B و C و D متداورة
- (2) لتكن P منتصف القطعة $[AC]$
أ. حدد p لحق النقطة P
ب. بين أن $\frac{\omega - p}{b - d} = \frac{1}{2}i$ و استنتج أن $DB = 2P\Omega$ وأن $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{P\Omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

التمرين 3:

- (1) حل في $\mathbb{C}$ المعادلة $z^2 - 4z + 8 = 0$
- (2) في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي: $z_A = 2 + 2i$ و $z_B = 2 - 2i$ و $z_C = 4$
أ. حدد معيار و عمدة كل من العددين العقديين z_A و z_B

ب.بين أن المثلث OAB متساوي الساقين وقائم الزاوية في O
ج.بين أن الرباعي $OBCA$ مربع
د.لتكن E منتصف القطعة $[OA]$ و لتكن D نقطة لحقها z_D حيث $z_D = iz_A$
بين أن E هي منتصف القطعة $[CD]$

التمرين 4:

نعتبر المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

(1) أ. نعتبر النقط A و B و C التي ألحاقها على التوالي : $a = 2$ و $b = 3 + i\sqrt{3}$ و $c = 2i\sqrt{3}$. حدد قياسا للزاوية $\widehat{ABC}$

ب. استنتج ω لحق النقطة Ω مركز الدائرة المحاطة بالمثلث ABC هو $1 + i\sqrt{3}$
(2) نرسم (z_n) المتتالية المعرفة ب :
$$\begin{cases} z_0 = 0 \\ z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 2 \quad (n \in \mathbb{N}) \end{cases}$$

و نضع A_n النقطة التي لحقها z_n

أ. بين أن النقط A_2 و A_3 و A_4 هي النقط التي ألحاقها على التوالي $3 + i\sqrt{3}$ و $2 + 2i\sqrt{3}$ و $2i\sqrt{3}$

لاحظ أن $A_1 = A$ و $A_2 = B$ و $A_4 = C$

ب. قارن أطوال القطع $[A_1A_2]$ و $[A_2A_3]$ و $[A_3A_4]$

ج. بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $z_{n+1} - \omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$

د. استنتج أن A_{n+1} هي صورة A_n بتحويل يتم تحديد طبيعته و عناصره المميزة

هـ. بين أن لكل n من $\mathbb{N}$: $A_{n+6} = A_n$ ثم حدد لحق A_{2012}

و. حدد طول القطعة $[A_n A_{n+1}]$

التمرين 5:

I. نعتبر العدد العقدي $U = 2 + \sqrt{3} + i$

1. بين أن معيار العدد U هو $2\sqrt{2 + \sqrt{3}}$

2. تحقق من أن $U = 2\left(1 + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) + i 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

3. (أ) بإخطاط $\cos^2(\theta)$ بين أن : $1 + \cos(2\theta) = 2\cos^2(\theta)$

(ب) بين أن $U = 4\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) + 4i \cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$ (ننكر أن $\sin(2\theta) = 2\cos(\theta)\sin(\theta)$)

ثم أكتب العدد U على شكله المثلثي

(ج) بين أن : $U^6 = \left(2\sqrt{2 + \sqrt{3}}\right)^6 i$

- II. نعتبر في المستوى العقدي النقطتين Ω و P اللذين لحقاهما $\omega = \sqrt{3}$ و U و ليكن h التحاكي الذي مركزه Ω و نسبته 2
- بين أن d لحق النقطة D صورة النقطة P بالتحاكي h هو $(4 + \sqrt{3}) + 2i$
 - حدد مجموعة النقط M ذات اللحق z بحيث : $|z - 4 - \sqrt{3} - 2i| = |U|$

التمرين 6:

- المستوى العقديمنسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{u}, \vec{v})$
- ولتكن A و B النقطتين اللتسن لحقاهما $a = i$ و $b = e^{-i\frac{5\pi}{6}}$
- ليكن r الدوران الذي مركزه O وزاويته $\frac{2\pi}{3}$ ولتكن C صورة B بالدوران r
 - اعط الكتابة العقدية للدوران r ثم أكتب c لحق النقطة C على شكله الأسّي
 - أكتب كلا من b و c على الشكل الجبري
 - لتكن D مرجح النقط المتزنة $(A, 2)$ و $(B, -1)$ و $(C, 2)$
 - حدد d لحق النقطة D
 - بين أن النقط A و B و C و D متداورة
 - ليكن h التحاكي الذي مركزه A و نسبته 2 و لتكن E صورة النقطة D بالتحاكي h
 - اعط الكتابة العقدية للتحاكي h ثم حدد e لحق النقطة E
 - أحسب $\frac{d-c}{e-c}$ و أكتبها على شكلها الأسّي
 - استنتج طبيعة المثلث CDE