

تصحيح التمرين الأول(1) ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x})^2 - 2\sqrt{e^x} + 1 + 1 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 \quad \text{لدينا :}$$

$$e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 : \mathbb{R} \text{ لكل } x \text{ من}$$

$$\text{من الواضح أن : } (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0 \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

إن

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0\}$$

$$= \{x \in \mathbb{R} / (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 > 0\}$$

$$= \mathbb{R}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = \ln 2 \quad (2)$$

لأن : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = 2$ و الدالة $\ln$ متصلة في 2.التأويل الهندسي : (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y = \ln 2$ بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln((\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1) = +\infty \quad (3)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{e^x} - 1)^2 + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

(4) ليكن $x \in \mathbb{R}$ ✓

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \\ &= \ln\left(e^x \times \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right)\right) \\ &= \ln(e^x) + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) \\ &= x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) \end{aligned}$$

$$f(x) = x + \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) : \mathbb{R} \text{ من } x \text{ لكل}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = \ln 1 = 0 \quad \checkmark$$

$$\text{لأن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{e^x}} + \frac{2}{e^x}\right) = 1 \text{ و الدالة } \ln \text{ متصلة في } 1.$$

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل مقارباً معادلته $y = x$ بجوار $+\infty$

(5) الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)
ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) \right)' \\ &= \frac{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)'}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - 2 \cdot \frac{(e^x)'}{2\sqrt{e^x}}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - \frac{e^x}{\sqrt{e^x}}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{e^x - \sqrt{e^x}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \\ &= \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } f'(x) = \frac{\sqrt{e^x}(\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \text{ لكل } x \text{ من } \mathbb{R}$$

لدينا : $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 > 0$ و $\sqrt{e^x} > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{e^x} - 1$

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{e^x} - 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow e^x = 1 \\ &\Leftrightarrow x = 0 \end{aligned}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\sqrt{(e^x)-1}$	$-$	0	$+$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\ln 2$	0	$+\infty$

(6) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
 f''(x) &= \left(\frac{\sqrt{e^x} (\sqrt{e^x} - 1)}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \right)' \\
 &= \left(\frac{e^x - \sqrt{e^x}}{e^x - 2\sqrt{e^x} + 2} \right)' \\
 &= \frac{(e^x - \sqrt{e^x})' \cdot (e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) - (e^x - \sqrt{e^x}) \cdot (e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)'}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} \\
 &= \frac{\left(e^x - \frac{\sqrt{e^x}}{2} \right) \cdot (e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) - (e^x - \sqrt{e^x}) \cdot (e^x - \sqrt{e^x})}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} \\
 &= \frac{e^{2x} - 2e^x \sqrt{e^x} + 2e^x - \frac{e^x \sqrt{e^x}}{2} + e^x - \sqrt{e^x} - e^{2x} + 2\sqrt{e^x} e^x - e^x}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} \\
 &= \frac{2e^x - \frac{e^x \sqrt{e^x}}{2} - \sqrt{e^x}}{(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} \\
 &= \frac{\frac{-\sqrt{e^x}}{2} (-4\sqrt{e^x} + e^x + 2)}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} = \frac{-\sqrt{e^x} \left((\sqrt{e^x})^2 - 4\sqrt{e^x} + 4 - 2 \right)}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2}
 \end{aligned}$$

$$\text{إذن : } f''(x) = \frac{-\sqrt{e^x} \left((\sqrt{e^x} - 2)^2 - 2 \right)}{2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2} \quad \mathbb{R} \text{ لكل } x \text{ من}$$

لندرس تقعر (C_f) :

$$\text{لدينا : } \sqrt{e^x} > 0 \text{ و } 2(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2)^2 > 0 \text{ إذن إشارة } f''(x) \text{ هي إشارة } -\left((\sqrt{e^x} - 2)^2 - 2 \right)$$

x	$-\infty$	$2\ln(2-\sqrt{2})$	$2\ln(2+\sqrt{2})$	$+\infty$	
$f'''(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$

على المجال $]-\infty, 2\ln(2-\sqrt{2})]$: $f''(x) \leq 0$ إذن (C_f) مقعر

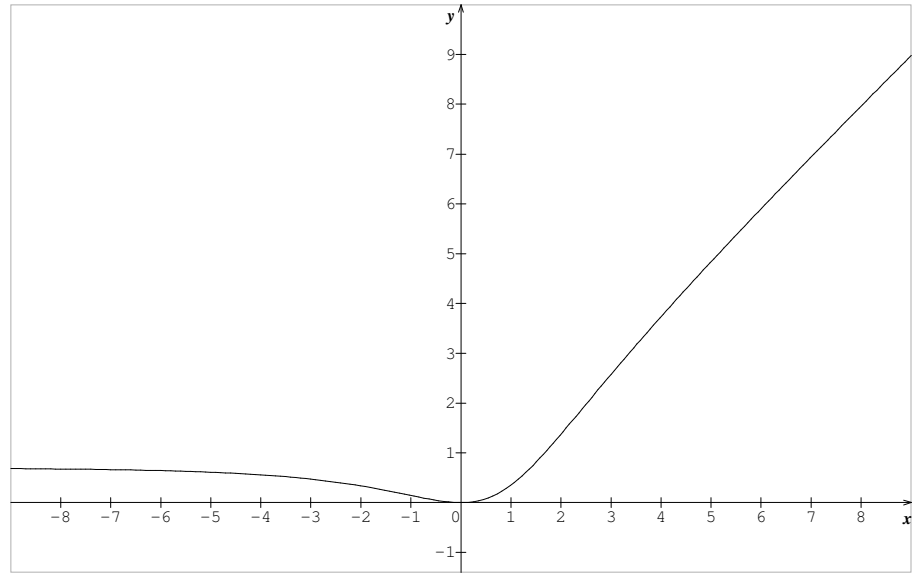
على المجال $[2\ln(2-\sqrt{2}), 2\ln(2+\sqrt{2})]$: $f''(x) \geq 0$ إذن (C_f) محدب

على المجال $[2\ln(2+\sqrt{2}), +\infty[$: $f''(x) \leq 0$ إذن (C_f) مقعر

و بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند $2\ln(2-\sqrt{2})$ فإن النقطة $I(2\ln(2-\sqrt{2}), f(2\ln(2-\sqrt{2})))$ هي نقطة انعطاف

و كذلك f'' تنعدم و تغير إشارتها عند $2\ln(2+\sqrt{2})$ فإن النقطة $J(2\ln(2+\sqrt{2}), f(2\ln(2+\sqrt{2})))$ هي نقطة انعطاف

(7)



(8) المعادلة $e^x - e^m = 2(-1 + \sqrt{e^x})$ تكافئ $e^x - 2\sqrt{e^x} + 2 = e^m$ ($x \in \mathbb{R}$)

تكافئ $\ln(e^x - 2\sqrt{e^x} + 2) = m$ ($x \in \mathbb{R}$)

تكافئ $f(x) = m$ ($x \in \mathbb{R}$)

✓ إذا كان $m < 0$: المعادلة لا تقبل حلا

✓ إذا كان $m = 0$: المعادلة لها حلا وحيدا

✓ إذا كان $0 < m < \ln 2$: المعادلة تقبل حلين

✓ إذا كان $m \geq \ln 2$: المعادلة لها حلا وحيدا

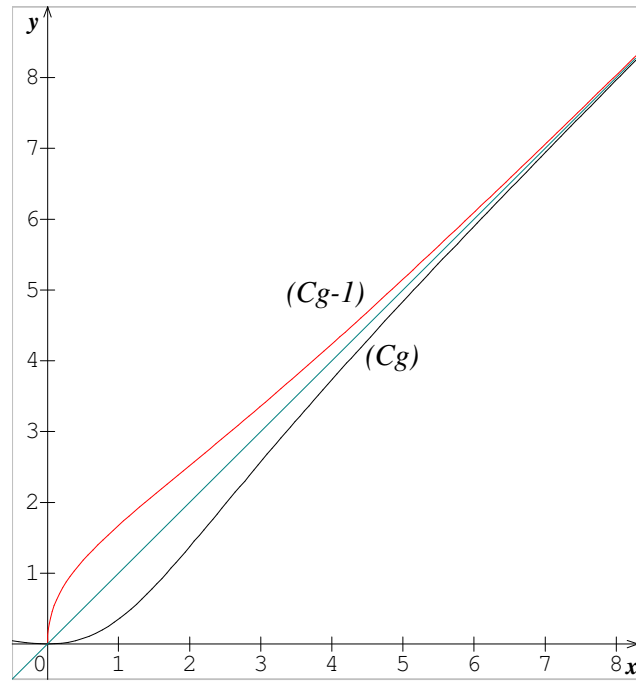
(9) أ- لدينا g متصلة و تزايدية قطعا على المجال $[0, +\infty[$ (لأن g قصور f على المجال $[0, +\infty[$)

إذن g تقبل دالة عكسية g^{-1} معرفة من المجال $[0, +\infty[$ معرفة من المجال $J = g([0, +\infty[) = [0, +\infty[$ نحو $[0, +\infty[$

ب- ليكن $x \in [0, +\infty[$:

$$\begin{aligned}y = g^{-1}(x) &\Leftrightarrow x = g(y) \\&\Leftrightarrow x = \ln\left(\left(\sqrt{e^y} - 1\right)^2 + 1\right) \\&\Leftrightarrow e^x = \left(\sqrt{e^y} - 1\right)^2 + 1 \\&\Leftrightarrow e^x - 1 = \left(\sqrt{e^y} - 1\right)^2 \\&\Leftrightarrow \left|\sqrt{e^y} - 1\right| = \sqrt{e^x - 1} \\&\Leftrightarrow \sqrt{e^y} - 1 = \sqrt{e^x - 1} \quad (y \geq 0) \\&\Leftrightarrow \sqrt{e^y} = 1 + \sqrt{e^x - 1} \\&\Leftrightarrow e^y = \left(1 + \sqrt{e^x - 1}\right)^2 \\&\Leftrightarrow y = \ln\left(\left(1 + \sqrt{e^x - 1}\right)^2\right) \\&\Leftrightarrow y = 2\ln\left(1 + \sqrt{e^x - 1}\right) \\g^{-1}(x) &= 2\ln\left(1 + \sqrt{e^x - 1}\right) : [0, +\infty[\text{ من } x \text{ إذن لكل}\end{aligned}$$

ج-



الجزء الأول :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^x + 2) = \ln(2) \quad (1)$$

لأن $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + 2 = 2$ و $\left(\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \right)$ و الدالة $\ln$ متصلة في 2
التأويل الهندسي : (C_f) يقبل مقاربا أفقيا معادلته $y = \ln 2$ بجوار $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 2) = +\infty \quad (2)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x + 2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

ب- ليكن $x \in \mathbb{R}$

✓

$$f(x) = \ln(e^x + 2) = \ln\left(e^x \left(1 + \frac{2}{e^x}\right)\right) = \ln(e^x) + \ln\left(1 + \frac{2}{e^x}\right) = x + \ln(1 + 2e^{-x})$$

إذن : $f(x) = x + \ln(1 + 2e^{-x})$ لكل x من $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + 2e^{-x}) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \ln(1 + 2e^t) = \ln(1) = 0 \quad \checkmark$$

لأن : $\lim_{t \rightarrow -\infty} 1 + 2e^t = 1$ و الدالة $\ln$ متصلة في 1

التأويل الهندسي : (C_f) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y = x$ بجوار $+\infty$

(3) لندرس تغيرات الدالة f

الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ (مركب دالتين قابلتين للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و $e^x + 2 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$)

ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \left(\ln(e^x + 2) \right)' = \frac{(e^x + 2)'}{e^x + 2} = \frac{e^x}{e^x + 2}$$

من الواضح أن $f'(x) > 0$ ($e^x > 0$)

إذن f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$\ln 2$	$+\infty$

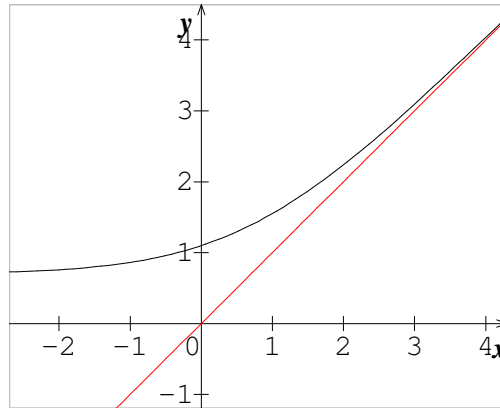
الجزء الثاني :

(1) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - x = \ln(1 + 2e^{-x})$$

نعلم أن $2e^{-x} > 0$ إذن $1 + 2e^{-x} > 1$ إذن $\ln(1 + 2e^{-x}) > 0$ إذن $f(x) - x > 0$

ومنه (C_f) يوجد فوق (Δ)



(2) التكامل $I = \int_2^3 |f(x) - x| dx$ هو مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = x$ و

المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 2$ و $x = 3$

(3) أ- لنبين أن لكل $t \in [0, +\infty[$: $\ln(1+t) \leq t$

نعتبر الدالة $u : t \mapsto \ln(1+t) - t$

$$u'(t) = (\ln(1+t) - t)' = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{1 - 1 - t}{1+t} = \frac{-t}{1+t}$$

لدينا $t \geq 0$ إذن $\frac{-t}{1+t} \leq 0$ إذن $u'(t) \leq 0$ و منه الدالة u تناقصية

وبما أن $t \geq 0$ فإن $u(t) \leq u(0)$

و بالتالي : $\ln(1+t) - t \leq 0$

نستنتج أن لكل $t \in [0, +\infty[$: $\ln(1+t) \leq t$

ب- لدينا لكل $t \in [0, +\infty[$: $\ln(1+t) \leq t$

و بنا أن لكل $x \in \mathbb{R}$: $2e^{-x} > 0$

$$\ln(1+2e^{-x}) \leq 2e^{-x} \quad \text{فلن :}$$

$$\text{ج- لدينا : لكل } x \text{ من } \mathbb{R} : 0 \leq \ln(1+2e^{-x}) \leq 2e^{-x}$$

$$\text{إذن } 0 \leq \int_2^3 \ln(1+2e^{-x}) dx \leq \int_2^3 2e^{-x} dx$$

$$\text{و منه } 0 \leq I \leq \int_2^3 2e^{-x} dx \quad (f(x) - x = \ln(1+2e^{-x}) > 0)$$

-د

$$\int_2^3 2e^{-x} dx = 2 \int_2^3 e^{-x} dx = 2[-e^{-x}]_2^3 = 2(e^{-2} - e^{-3}) \quad \checkmark$$

$$0 \leq I \leq 2(e^{-2} - e^{-3}) \quad \checkmark$$

$$0 \leq I \leq 2(e^{-2} - e^{-3}) \leq 0,2$$

و هذا تأطير سعته 0,2

つづく