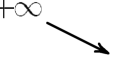


تصحيح التمرين الأول

1. أ. $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty$ (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$
- $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty$ (C_f) يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$ (C_f) يقبل فرعا شلجيميا في اتجاه محور الأرتيب بجوار $-\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) + x) = 0$ (C_f) يقبل مقاربا مائلا معادلته $y = -x$ بجوار $+\infty$

ب. جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$		$-$
$f(x)$	$+\infty$ 	$+\infty$ 	$-\infty$

ج. على المجال $]0, +\infty[$ لدينا (C_f) يوجد فوق المستقيم $y = -x$ (Δ)

إن $f(x) - (-x) \geq 0$ و منه $f(x) + x \geq 0$

د. عدد حلول المعادلة $f(x) = -x$ على $\mathbb{R}^*$:

لدينا (C_f) و $y = -x$ (Δ) يتقاطعان في نقطة وحيدة و منه للمعادلة $f(x) = -x$: حلا وحيدا في $\mathbb{R}^*$.

2. مساحة الحيز المخدش في المبيان هي مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيم $y = -x$ (Δ) و المستقيمين اللذين معادلتهما

$x = 1$ و $x = 2$:

$$A = \int_1^2 |f(x) - (-x)| dx . (U.A)$$

و بما أن $f(x) + x \geq 0$ على المجال $]0, +\infty[$

$$A = \int_1^2 (f(x) + x) dx . (U.A) \text{ فإن :}$$

$$A = \int_1^2 \left(e^{-x} + \frac{1}{x} \right) dx . (U.A) \text{ إذن :}$$

$$A = \left[-e^{-x} + \ln x \right]_1^2 . (U.A) \text{ إذن :}$$

$$A = (e^{-1} - e^{-2} + \ln 2) . (U.A) \text{ و منه :}$$

تصحيح التمرين الثاني

الجزء الأول :

(1) الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} g'(x) &= (-xe^{-x} + 1)' \\ &= (-x)'e^{-x} + (-x)(e^{-x})' + 0 \\ &= -e^{-x} - x \cdot (-e^{-x}) \\ &= -e^{-x} + xe^{-x} \\ &= (x-1)e^{-x} \end{aligned}$$

لدينا : $e^{-x} > 0$ إذن إشارة $g'(x)$ هي إشارة $x-1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$x-1$	-	0	+

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	$+\infty$	$(e-1)/e$	1

(2) لدينا $g(1)$ هي القيمة الدنوية للدالة g على $\mathbb{R}$

إذن لكل $x \in \mathbb{R}$: $g(x) \geq g(1)$

إذن لكل $x \in \mathbb{R}$: $g(x) \geq \frac{e-1}{e}$

و منه لكل $x \in \mathbb{R}$: $g(x) > 0$ (لأن $\frac{e-1}{e} > 0$)

الجزء الثاني :

(1) - لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 + (x+1)e^{-x} = -\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x - 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x + 1 = -\infty : \text{لأن} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right.$$

ب- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + (x+1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 + xe^{-x} + e^{-x} = +\infty$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x - 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} -te^t = 0 \quad \left(\begin{array}{l} t = -x \\ x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty \end{array} \right) : \text{لأن} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0 \end{array} \right.$$

(2) أ- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x-1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} + e^{-x} = 0$

إن : (Δ) ذي المعادلة $y = x - 1$ مقارب مائل للمنحنى (C_f) بجوار $+\infty$

ب- لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - 1 + (x+1)e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 - \frac{1}{x} + \left(1 + \frac{1}{x}\right)e^{-x} = +\infty$$

و إن (C_f) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأرتيب بجوار $-\infty$.

(3) ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) - (x-1) = (x+1)e^{-x}$$

لدينا : $e^{-x} > 0$ إذن إشارة $f(x) - (x-1)$ هي إشارة $(x+1)$

✓ على المجال $[-1, +\infty[$: $x+1 \geq 0$ إذن $f(x) - (x-1) \geq 0$ و منه (C_f) يوجد فوق (Δ)

✓ على المجال $] -\infty, 1]$: $x+1 \leq 0$ إذن $f(x) - (x-1) \leq 0$ و منه (C_f) يوجد تحت (Δ)

(4) أ- الدالة f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= (x-1+(x+1)e^{-x})' \\ &= 1+(x+1)'e^{-x} + (x+1).(e^{-x})' \\ &= 1+1.e^{-x} - (x+1)e^{-x} \\ &= 1+e^{-x}.(1-x-1) \\ &= 1-xe^{-x} \\ &= g(x) \end{aligned}$$

إن : $f'(x) = g(x)$ لكل x من $\mathbb{R}$

ب- لدينا حسب الجزء الأول : (2) $g(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إن : $f'(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

و منه f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

جدول تغيرات الدالة f :

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

(5)

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

لدينا $f'(x) = g(x)$ إذن : $f''(x) = g'(x)$

و منه على المجال $[1, +\infty[$: $f''(x) \geq 0$ إذن (C_f) محدب

و على المجال $] -\infty, 1]$: $f''(x) \leq 0$ إذن (C_f) مقعر

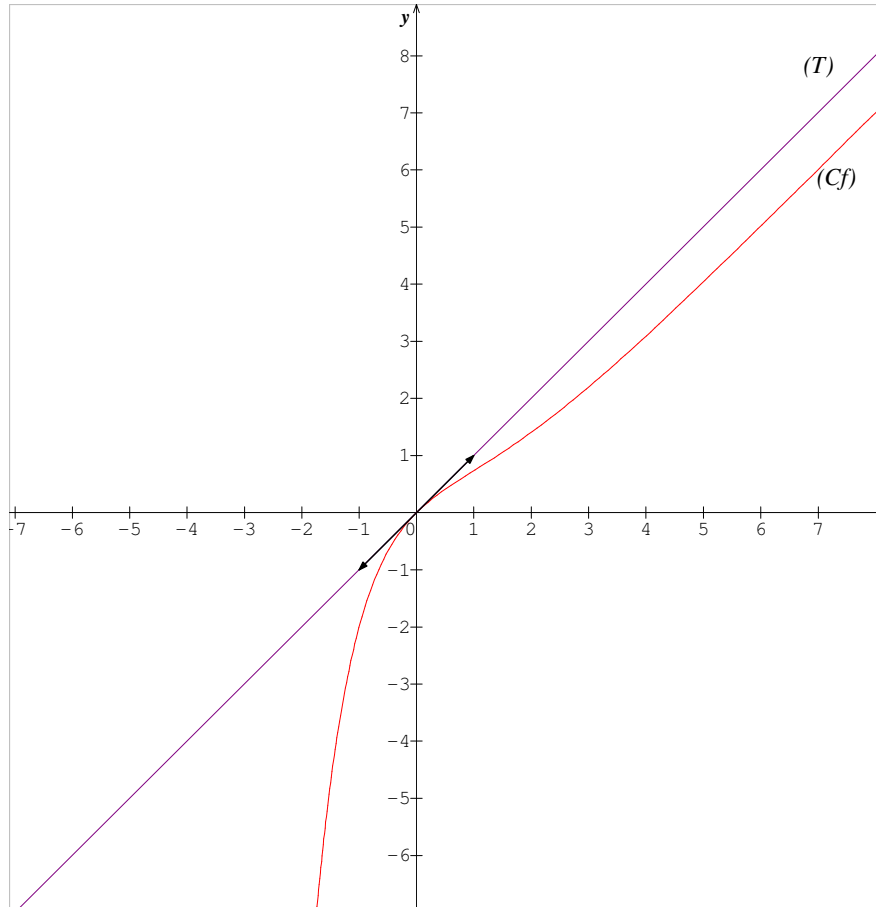
و بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 1 فإن النقطة $I(1, f(1))$ هي نقطة انعطاف لمنحنى (C_f) .

(6) أ- معادلة المماس (T) للمنحنى (C_f) في النقطة التي أفصولها 0 :

$$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$$

$$\text{إذن : } y = 1 \cdot (x) + 0 \text{ أي } y = x$$

ب-



(7) أ- باستعمال مكاملة بالأجزاء ، لنحسب $\int_0^2 (x+1)e^{-x} dx$:

$$\begin{cases} u(x) = x+1 \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 (x+1)e^{-x} dx &= \left[-(x+1)e^{-x} \right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x} dx \\ &= \left[-(x+1)e^{-x} \right]_0^2 - \left[e^{-x} \right]_0^2 \\ &= (-3e^{-2} + 1) - (e^{-2} - 1) \\ &= 2 - 4e^{-2} \end{aligned}$$

ب- مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيمات اللذين معادلاتهم : $y = x - 1$ و $x = 0$ و $x = 2$

(على المجال $[0,2]$: $f(x) - (x-1) \geq 0$)

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |f(x) - (x-1)| dx .(UA) \\ &= \int_0^2 (f(x) - (x-1)) dx .(UA) \\ &= \int_0^2 (x+1)e^{-x} dx .(UA) \\ &= (2 - 4e^{-2}) .(UA) \end{aligned}$$

الجزء الثالث :

(1)

✓ من أجل $n = 0$:

لدينا $u_0 = 1$

إذن $0 \leq u_0 \leq 1$

✓ ليكن $n \in \mathbb{N}$:

• نفترض أن : $0 \leq u_n \leq 1$

• و نبين أن : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

لدينا $0 \leq u_n \leq 1$ و لدينا f تزايدية على المجال $[0,1]$

إذن : $f(0) \leq f(u_n) \leq f(1)$

إذن : $0 \leq u_{n+1} \leq 2e^{-1} \leq 1$

✓ نستنتج : $0 \leq u_n \leq 1$ لكل n من $\mathbb{N}$

(2) ليكن $n \in \mathbb{N}$:

لدينا على المجال $[0,1]$: $f(x) \leq x$

و بما أن $u_n \in [0,1]$ فإن $f(u_n) \leq u_n$

و منه لكل n من $\mathbb{N}$: $u_{n+1} \leq u_n$

وبالتالي (u_n) تناقصية .

(3)

✓ بما أن (u_n) تناقصية و مصغرة فإن (u_n) متقاربة

✓

• f متصلة على المجال $[0,1]$

• $f([0,1]) = [f(0), f(1)] = [0, 2e^{-1}] \subset [0,1]$

• (u_n) متقاربة

إن نهاية (u_n) هي حل للمعادلة $f(x) = x$

$$f(x) = x \Leftrightarrow x = 0$$

و منه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

تصحيح التمرين الثالث

(1)

$$\begin{aligned} D_f &= \{x \in \mathbb{R} / e^x - 1 \neq 0\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / e^x \neq 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R} / x \neq 0\} \\ &=]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\end{aligned}$$

(2)

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right. : \text{لأن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = -\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^-} 2x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} e^x - 1 = 0^- \end{array} \right. : \text{لأن}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} 2x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} e^x - 1 = 0^+ \end{array} \right. : \text{لأن}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right. : \text{لأن}$$

(3) لندرس تغيرات f :

الدالة f قابلة للاشتقاق على D_f

ليكن $x \in D_f$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(2x + \frac{e^x}{e^x - 1} \right)' \\ &= 2 + \frac{(e^x)'(e^x - 1) - e^x(e^x - 1)'}{(e^x - 1)^2} \\ &= 2 + \frac{e^x(e^x - 1) - e^x \cdot e^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= 2 + \frac{\cancel{e^{2x}} - e^x - \cancel{e^{2x}}}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{2(e^x - 1)^2 - e^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{2(e^{2x} - 2e^x + 1) - e^x}{(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{2e^{2x} - 5e^x + 2}{(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

لدينا : $(e^x - 1)^2 > 0$ إذن إشارة $f'(x)$ هي إشارة $2e^{2x} - 5e^x + 2$

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$2e^{2x} - 5e^x + 2$	+	0	-	-	+

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$	$-\ln 2$	0	$\ln 2$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$-2\ln(2)-1$	$+\infty$	$2\ln(2)+2$	$+\infty$

(4)

$$x = 0 \text{ يقبل مقارباً عمودياً معادلته } (C_f) \Leftrightarrow \begin{cases} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = -\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = +\infty \end{cases} \checkmark$$

$$-\infty \text{ بجوار } y = 2x \text{ يقبل مقاربا مائلا معادلته } (C_f) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = 0 \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ : لنحسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x + \frac{e^x}{e^x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{e^x}{x(e^x - 1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{1}{x \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x \text{ : لنحسب}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = 1$$

$$+\infty \text{ بجوار } y = 2x + 1 \text{ يقبل مقاربا مائلا معادلته } (C_f) \text{ : إذن } \quad \checkmark$$

$$x \in D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\text{ ليكن } (5)$$

$$2(0) - x = -x \in D_f =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[\text{ من الواضح أن : } \quad \checkmark$$

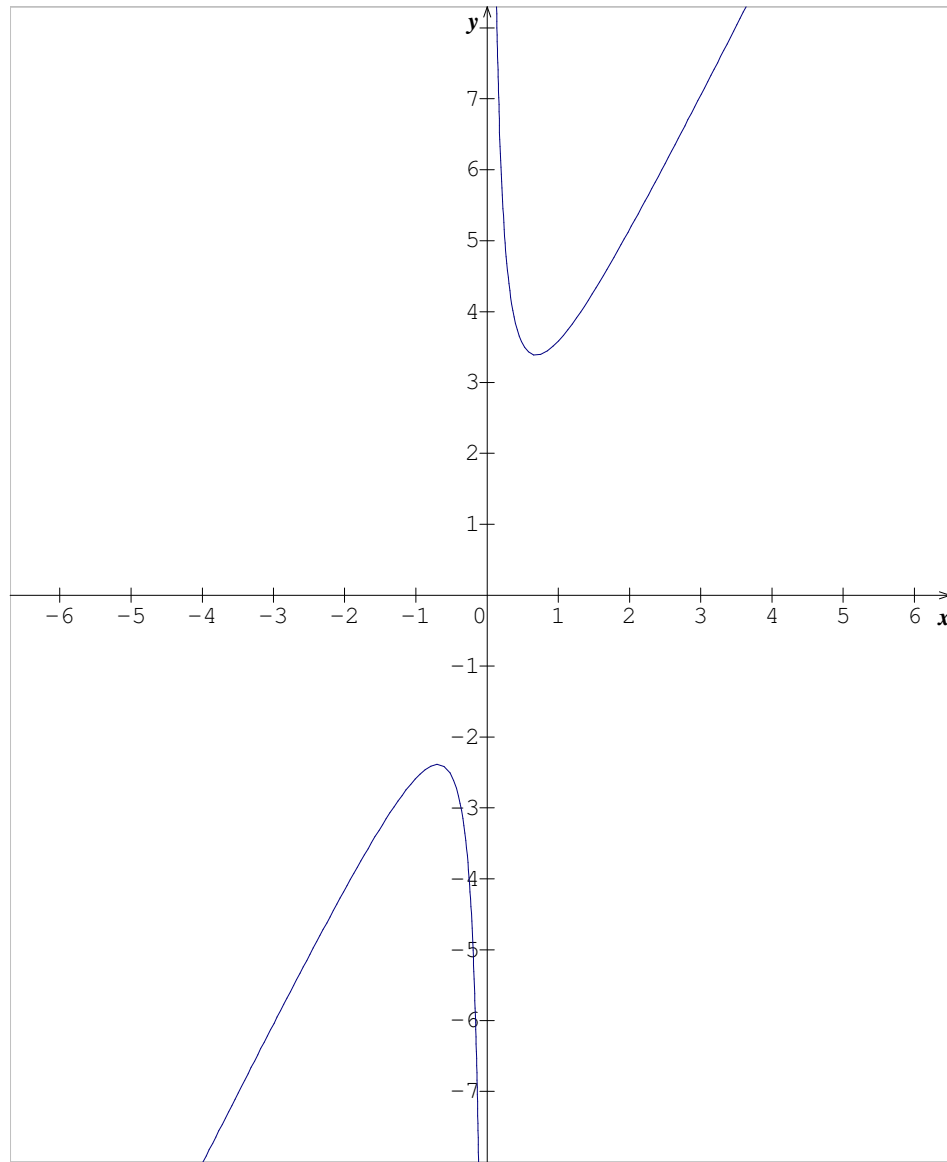
$$f(2(0) - x) = f(-x) = -2x + \frac{e^{-x}}{e^{-x} - 1} = -2x + \frac{1}{1 - \frac{1}{e^x}} = -2x + \frac{1}{1 - e^x} \quad \checkmark$$

$$2\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) = 1 - \left(2x + \frac{e^x}{e^x - 1}\right) = -2x + 1 - \frac{e^x}{e^x - 1} = -2x + \frac{\cancel{e^x} - 1 - \cancel{e^x}}{e^x - 1} = -2x + \frac{1}{1 - e^x}$$

$$f(2(0) - x) = 2\left(\frac{1}{2}\right) - f(x) \text{ : إذن}$$

$$\text{و منه النقطة } A\left(0, \frac{1}{2}\right) \text{ مركز تماثل للمنحنى } (C_f).$$

(6)



(7) مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و المستقيم (Δ) ذي المعادلة $y = 2x$ و المستقيمين اللذين معادلتاهما $x = 1$ و $x = \ln 2$

$$\begin{aligned} A &= \int_{\ln 2}^1 |f(x) - 2x| dx .(UA) \\ &= \int_{\ln 2}^1 \frac{e^x}{e^x - 1} dx .(UA) \\ &= \int_{\ln 2}^1 \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} dx .(UA) \\ &= \left[\ln |e^x - 1| \right]_{\ln 2}^1 .(UA) \end{aligned}$$

$$A = \ln(e-1). (UA) \text{ و منه :}$$

تصحيح التمرين الرابع :

الجزء الأول

(1)

• ليكن $x \in [0, +\infty[$

$$g'(x) = (x + 2 - e^x)' = 1 - e^x$$

لدينا : $x \geq 0$ إذن $e^x \geq e^0$

إذن $e^x \geq 1$

إذن $-e^x \leq -1$

إذن $1 - e^x \leq 0$

و منه $g'(x) \leq 0$ $\forall x \in [0, +\infty[$

و لدينا : $g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

و بالتالي الدالة g تناقصية قطعاً على $[0, +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 2 - e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{e^x}{x} \right) = -\infty \quad \bullet$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

(2) أ- لنبين أن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0, +\infty[$

بما أن :

✓ الدالة g متصلة على $[0, +\infty[$ (مجموع دوال متصلة على $[0, +\infty[$)

✓ الدالة g تناقصية قطعاً على $[0, +\infty[$

✓ لدينا : $0 \in g([0, +\infty[) =]-\infty, 1]$ إذن $0 \in g([0, +\infty[)$

فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $[0, +\infty[$.

ب- لدينا :

✓ g متصلة على $[1, 14; 1, 15]$

$$g(1,14) \times g(1,15) < 0 \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : $1,14 < \alpha < 1,15$

ج-

✓ الحالة 1: إذا كان $x \geq \alpha$

نعلم أن g تناقصية قطعاً على $[0, +\infty[$

$$\text{إذن } g(x) \leq g(\alpha)$$

$$\text{و منه } g(x) \leq 0 \quad (\text{لأن } g(\alpha) = 0)$$

✓ الحالة 2: إذا كان $0 \leq x \leq \alpha$

نعلم أن g تناقصية قطعاً على $[0, +\infty[$

$$\text{إذن } g(x) \geq g(\alpha)$$

$$\text{و منه } g(x) \geq 0 \quad (\text{لأن } g(\alpha) = 0)$$

الجزء الثاني

(1) أ- ليكن $x \in [0, +\infty[$

الدالة f قابلة للاشتقاق على $[0, +\infty[$

$$f'(x) = \left(\frac{e^x - 1}{xe^x + 1} \right)' = \frac{(e^x - 1)' \cdot (xe^x + 1) - (e^x - 1)(xe^x + 1)'}{(xe^x + 1)^2} \quad \text{لدينا :}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (xe^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + x(e^x)' + 0)}{(xe^x + 1)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot (xe^x + 1) - (e^x - 1)(e^x + xe^x)}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x \cdot (xe^x + 1) - (e^x - 1) \cdot (1 + x) \cdot e^x}{(xe^x + 1)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$f'(x) = \frac{e^x \cdot [(xe^x + 1) - (e^x - 1) \cdot (1 + x)]}{(xe^x + 1)^2} = \frac{e^x [xe^x + 1 - e^x - xe^x + 1 + x]}{(xe^x + 1)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$f'(x) = \frac{e^x [x + 2 - e^x]}{(xe^x + 1)^2} \quad \text{إذن :}$$

$$f'(x) = \frac{e^x g(x)}{(xe^x + 1)^2} : [0, +\infty[\text{ لكل } x \text{ ومنه :}$$

ب- على المجال $[0, \alpha]$:

$$\text{لدينا : } e^x > 0 \text{ و } (xe^x + 1)^2 > 0$$

و حسب نتيجة الجزء الأول السؤال ج- : $g(x) \geq 0$

إذن $f'(x) \geq 0$ و منه الدالة f تزايدية

على المجال $[\alpha, +\infty[$:

$$\text{لدينا : } e^x > 0 \text{ و } (xe^x + 1)^2 > 0$$

و حسب نتيجة الجزء الأول السؤال ج- : $g(x) \leq 0$

إذن $f'(x) \leq 0$ و منه الدالة f تناقصية

(2) أ- ليكن $x \in [0, +\infty[$:

$$\text{لدينا : } f(x) = \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} = \frac{\cancel{e^x} \left(1 - \frac{1}{e^x}\right)}{\cancel{e^x} \left(x + \frac{1}{e^x}\right)} = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

$$\text{إذن : لكل } x \geq 0 : f(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}}$$

ب-

$$\bullet \text{ لدينا : } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-x}}{x + e^{-x}} = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} t = -x \\ x \rightarrow +\infty \\ t \rightarrow -\infty \end{array} \right) \quad \text{لأن : } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + e^{-x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} x + e^{-x} = +\infty \end{array} \right.$$

• بما أن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فإن (C_f) يقبل مقارب أفقي معادلته $y = 0$ بجوار $+\infty$

$$(3) \text{ أ- لدينا : } f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1}$$

و نعلم أن α حل للمعادلة $g(x) = 0$ إذن : $g(\alpha) = 0$

$$\begin{aligned} g(\alpha) = 0 &\Leftrightarrow \alpha + 2 - e^\alpha = 0 \\ &\Leftrightarrow e^\alpha = \alpha + 2 \end{aligned} \quad \text{إذن لدينا :}$$

$$\text{و منه : } f(\alpha) = \frac{e^\alpha - 1}{\alpha e^\alpha + 1} = \frac{(\alpha + 2) - 1}{\alpha(\alpha + 2) + 1} = \frac{\alpha + 1}{\alpha^2 + 2\alpha + 1} = \frac{\alpha + 1}{(\alpha + 1)^2} = \frac{1}{\alpha + 1}$$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha+1} \text{ و بالتالي :}$$

$$\text{ب- لدينا : } 1,14 < \alpha < 1,15 \text{ إذن : } 2,14 < 1+\alpha < 2,15$$

$$\text{إذن : } \frac{1}{2,15} < \frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{2,14}$$

$$\text{إذن : } 0,46 < \frac{1}{2,15} < \frac{1}{1+\alpha} < \frac{1}{2,14} < 0,47$$

$$\text{و منه : } 0,46 < f(\alpha) < 0,47 \text{ و هذا تأطير للعدد } f(\alpha) \text{ سعته } 0,47 - 0,46 = 0,01 = 10^{-2}$$

$$(4) \text{ معادلة المماس } (T) \text{ للمنحنى } (C_f) \text{ في النقطة ذات الأصول } 0 :$$

$$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$$

$$\text{لدينا : } f'(0) = 1 \text{ و } f(0) = 0 \text{ إذن : } y = 1 \cdot (x - 0) + 0 \text{ أي : } y = x$$

$$(5) \text{ أ- ليكن } x \text{ من } [0, +\infty[:$$

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{e^x - 1}{xe^x + 1} - x \\ &= \frac{e^x - 1 - x^2 e^x - x}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1 - x^2)e^x - (1 + x)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1 + x)(1 - x)e^x - (1 + x)}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1 + x)[(1 - x)e^x - 1]}{xe^x + 1} \\ &= \frac{(1 + x)(e^x - xe^x - 1)}{xe^x + 1} \end{aligned}$$

$$\text{إذن : لكل } x \text{ من } [0, +\infty[: u(x) = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1} \text{ حيث } f(x) - x = e^x - xe^x - 1$$

$$\text{ب- اندرس تغيرات الدالة } u$$

$$\text{ليكن } x \text{ من } [0, +\infty[:$$

$$\begin{aligned} u'(x) &= (e^x - xe^x - 1)' \\ &= (e^x)' - (xe^x)' + 0 \\ &= e^x - ((x)'e^x + x(e^x)') \\ &= e^x - (e^x + xe^x) \\ &= e^x - e^x - xe^x \\ &= -xe^x \end{aligned}$$

لدينا : $x \geq 0$ و $e^x > 0$ إذن : $u'(x) \leq 0$ لكل x من $[0, +\infty[$
إذن الدالة u تناقصية .

وبما أن $x \geq 0$ و u تناقصية فإن : $u(x) \leq u(0)$ أي : $u(x) \leq 0$ (لأن $u(0) = 0$)

ج- ليكن x من $[0, +\infty[$:

لندرس الوضع النسبي ل (C_f) و (T)

$$f(x) - x = \frac{(x+1)u(x)}{xe^x + 1}$$

ولدينا $x \geq 0$ إذن $xe^x + 1 > 0$ و $x+1 > 0$ و منه إشارة $f(x) - x$ هي إشارة $u(x)$

و حسب نتيجة لسؤال السابق لدينا : $u(x) \leq 0$ و منه $f(x) - x \leq 0$ لكل x من $[0, +\infty[$

و بالتالي : (C_f) يوجد تحت المستقيم (T)

(6)



الجزء الثالث

(1) لنحدد دالة أصلية ل f على $[0, +\infty[$

الدالة f متصلة على $[0, +\infty[$ إذن f تقبل دالة أصلية F على $[0, +\infty[$

ليكن x من $[0, +\infty[$:

$$f(x) = \frac{1-e^{-x}}{x+e^{-x}}$$

$$f(x) = \frac{(x+e^{-x})'}{x+e^{-x}}$$

و منه لكل x من $[0, +\infty[$: $F(x) = \ln|x+e^{-x}| = \ln(x+e^{-x})$ (لأن $x+e^{-x} > 0$)

(2)

$$\mathcal{A} = \int_0^1 |f(x) - x| dx \times \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|$$

لدينا :

وبما أن $f(x) - x \leq 0$ لكل x من $[0, +\infty[$

$$\mathcal{A} = \int_0^1 (x - f(x)) dx \times 4cm \times 4cm : \text{ فإن}$$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{x^2}{2} - F(x) \right]_0^1 \times 16cm^2 : \text{ إذن}$$

$$\mathcal{A} = \left[\frac{x^2}{2} - \ln(x + e^{-x}) \right]_0^1 \times 16cm^2 : \text{ إذن}$$

$$\mathcal{A} = \left(\frac{1}{2} - \ln(1 + e^{-1}) \right) \times 16cm^2 : \text{ إذن}$$

$$\mathcal{A} = (8 - 16\ln(1 + e^{-1}))cm^2 : \text{ ومنه}$$

$$v_n = \int_n^{n+1} f(x) dx \text{ ، نضع } N \text{ من } n \text{ (3) أ- لدينا لكل } n$$

$$v_0 = \int_0^1 f(x) dx = [F(x)]_0^1 = [\ln(x + e^{-x})]_0^1 = \ln(1 + e^{-1})$$

$$v_1 = \int_1^2 f(x) dx = [F(x)]_1^2 = [\ln(x + e^{-x})]_1^2 = \ln(2 + e^{-2}) - \ln(1 + e^{-1})$$

$$v_2 = \int_2^3 f(x) dx = [F(x)]_2^3 = [\ln(x + e^{-x})]_2^3 = \ln(3 + e^{-3}) - \ln(2 + e^{-2})$$

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) : n \geq 2 \text{ ب- لنبين أن لكل}$$

• ليكن $x \in \mathbb{R}$ بحيث : $n \leq x \leq n+1$ و لدينا f تناقصية على المجال $[2, +\infty[$

$$f(n+1) \leq f(x) \leq f(n) : \text{ إذن}$$

$$\int_n^{n+1} f(n+1) dx \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq \int_n^{n+1} f(n) dx : \text{ إذن}$$

$$(n+1-n)f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq (n+1-n)f(n) : \text{ إذن}$$

$$f(n+1) \leq \int_n^{n+1} f(x) dx \leq f(n) : \text{ ومنه}$$

$$f(n+1) \leq v_n \leq f(n) \text{ نستنتج مما سبق أن } \bullet$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = 0 \text{ و } \lim_{n \rightarrow +\infty} f(n+1) = 0 \text{ و بما أن}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0 : \text{ فإنه حسب مبرهنة الدرك :}$$

تصحيح التمرين الخامس

I.
(1)

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - 2x + 2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 2 + \frac{2}{x} \right) = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x} = 0 \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - 2x + 2 = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x + 2 = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

(2) أ- الدالة g قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
ليكن $x \in \mathbb{R}$

$$g'(x) = (e^x - 2x + 2)' = e^x - 2$$

$$g'(x) = e^x - 2 : \mathbb{R} \text{ من } x \text{ لكل}$$

ب-

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - 2 = 0 \quad \checkmark$$

$$\Leftrightarrow x = \ln 2$$

لندرس إشارة $e^x - 2$:

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$e^x - 2$	$-$	0	$+$

جدول تغيرات الدالة g :

x	$-\infty$	$\ln 2$	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	$+\infty$	$4 - 2\ln 2$	$+\infty$

✓ لدينا $g(\ln 2)$ هي القيمة الدنيا للدالة g على $\mathbb{R}$

إذن : $g(x) \geq g(\ln 2)$ لكل $x \in \mathbb{R}$

إن : $g(x) \geq 4 - 2\ln 2 > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$
و منه $g(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

II.

(1) أ-

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x} = -\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2}x + 1 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} e^t = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} + \frac{1}{x} + e^{-x} = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

(C_f) يقبل فرعاً شلجماً في اتجاه محور الأرتاب بجوار $-\infty$

ب-

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x} = +\infty \quad \checkmark$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2}x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = \lim_{t \rightarrow -\infty} -te^t = 0 \end{array} \right. \quad \text{لأن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^{-x} = 0 \quad \checkmark \text{ لدينا :}$$

إن : (C_f) يقبل المستقيم (D) مقارباً مانلاً معادلته $y = \frac{1}{2}x + 1$ بجوار $+\infty$

ج- لندرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (D) :

ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\text{لدينا } f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) = xe^{-x} \quad \text{و بما أن } e^{-x} > 0 \text{ فإن إشارة } f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \text{ هي إشارة } x$$

$\checkmark$ على المجال $]-\infty, 0]$ لدينا $x \leq 0$ إن $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) \leq 0$ و منه (C_f) يوجد تحت (D)

✓ على المجال $[0, +\infty[$ لدينا $x \geq 0$ إذن $f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right) \geq 0$ و منه (C_f) يوجد فوق (D)

(2) الدالة f قابلة للإشتقاق على $\mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x}\right)' \\ &= \frac{1}{2} + (x)'e^{-x} + x(e^{-x})' \\ &= \frac{1}{2} + e^{-x} - xe^{-x} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{e^x} - \frac{x}{e^x} \\ &= \frac{e^x + 2 - 2x}{2e^x} \\ &= \frac{g(x)}{2e^x} \end{aligned}$$

إذن : $f'(x) = \frac{g(x)}{2e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا : $g(x) > 0$ و $2e^x > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

إذن $f'(x) > 0$ لكل x من $\mathbb{R}$

و منه الدالة f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

(3) أ-

✓ f متصلة على $[-1, 0]$

✓ لدينا $f(-1) = \frac{1}{2} - e < 0$ و $f(0) = 1 > 0$ إذن : $f(0) \times f(-1) < 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : يوجد α من المجال $]-1, 0[$ بحيث $f(\alpha) = 0$

ب- معادلة (T) مماس المنحنى (C_f) عند النقطة ذات الأفضول 0 :

$$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0)$$

$$y = \frac{3}{2}x + 1$$

ج- ليكن $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{g(x)}{2e^x} \right)' \\ &= \frac{g'(x) \times 2e^x - g(x) \times (2e^x)'}{(2e^x)^2} \\ &= \frac{(e^x - 2) \times 2e^x - (e^x - 2x + 2) \times 2e^x}{(2e^x)^2} \\ &= \frac{2e^x [e^x - 2 - e^x + 2x - 2]}{(2e^x)^2} \\ &= \frac{2x - 4}{2e^x} \\ &= \frac{x - 2}{e^x} \end{aligned}$$

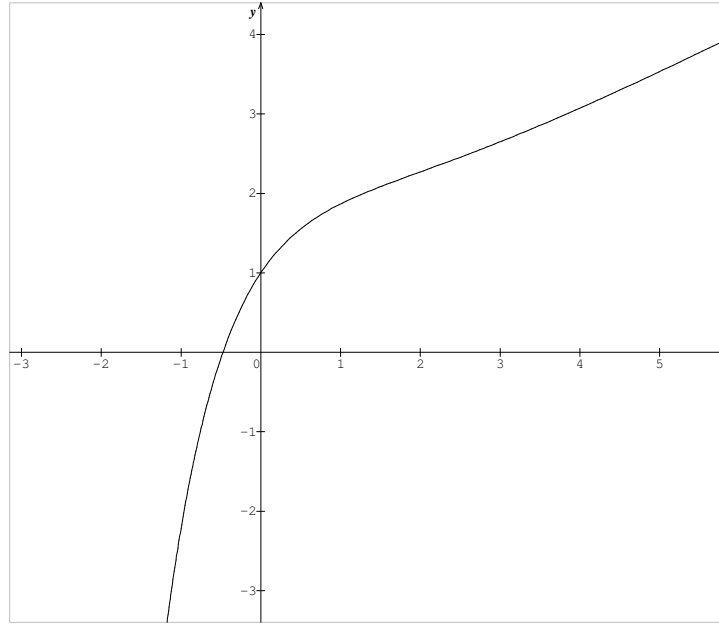
إذن $f''(x) = \frac{x-2}{e^x}$ لكل x من $\mathbb{R}$

لدينا $e^x > 0$ إذن إشارة $f''(x)$ هي إشارة $x - 2$

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	$-$	0	$+$

بما أن f'' تنعدم و تغير إشارتها عند العدد 2 فإن النقطة $I(2; 2 + 2e^{-2})$ هي نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)

(4)



(5) باستعمال مكاملة بالأجزاء لنحسب : $\int_0^2 x e^{-x} dx$

$$\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{cases} \quad \nwarrow \quad \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{cases} \quad \downarrow$$

$$\begin{aligned} \int_0^2 x e^{-x} dx &= \left[-x e^{-x} \right]_0^2 - \int_0^2 -e^{-x} dx \\ &= \left[-x e^{-x} \right]_0^2 - \left[e^{-x} \right]_0^2 \\ &= (-2e^{-2} - 0) - (e^{-2} - 1) \\ &= 1 - 3e^{-2} \\ &= 1 - \frac{3}{e^2} \end{aligned}$$

(6) مساحة الحيز المحصور بين (C_f) و محور الأفاسيل و المستقيمين المعرفين بالمعادلتين $x = 0$ و $x = 2$.

$$\begin{aligned} A &= \int_0^2 |f(x)| dx \cdot \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{j}\| \\ &= \int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 1 + xe^{-x} \right) dx \cdot 2cm \cdot 2cm \\ &= \left(\int_0^2 \left(\frac{1}{2}x + 1 \right) dx + \int_0^2 xe^{-x} dx \right) \cdot 4cm^2 \\ &= \left(\left[\frac{x^2}{4} + x \right]_0^2 + \left(1 - \frac{3}{e^2} \right) \right) \cdot 4cm^2 \\ &= \left(3 + 1 - \frac{3}{e^2} \right) \cdot 4cm^2 \\ &= \left(16 - \frac{12}{e^2} \right) cm^2 \end{aligned}$$

つづく