

الأستاذ:
نجيب
عثماني

سلسلة رقم 8: الدوال الأسية
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة
والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2 + 3x} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{x^2} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - e^x \quad (7)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 - e^x \quad (10)$$

$$(14) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{3x}}{x} \quad (13) \quad (2x = X \text{ ضع}) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3} \quad (12)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{x^3 + x + 1}$$

تطبيق الخاصية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = 0$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0^-$

$$(17) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (x^5 - 4x^3) e^x \quad (16) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (3x - 1) e^x \quad (15)$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (x^3 - 2x) e^{2x} \quad (18) \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} e^{\frac{1}{x}}$$

تطبيق الخاصية: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(e^{\frac{1}{x}} - 1 \right) \quad (20) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{3x} \quad (19)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x+1} - e}{x} \quad (23) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} - 1}{x} \quad (22) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^{1-x} - 1}{x - 1} \quad (21)$$

(استعمل المشتقة)

تمرين 9: أحسب مشتقة الدالة: $f: x \mapsto e^{x^2 - x}$

تمرين 10: أحسب $f'(x)$ في الحالات الآتية:

$$f(x) = e^{3x} + e^x \quad (1)$$

$$f(x) = x^2 e^{-x} \quad (3) \quad f(x) = 2x - e^{-x} \quad (2)$$

$$f(x) = (2x - 1)(e^x - 1) \quad (4)$$

$$f(x) = \sqrt{e^{2x} - e^x} \quad (6) \quad f(x) = (x - 1)e^{\frac{1}{x}} \quad (5)$$

$$f(x) = e^{x \ln x} \quad (7)$$

$$f(x) = \frac{2}{(x-1)^2} e^{\frac{x+1}{x-1}} \quad (9) \quad f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1} \quad (8)$$

تمرين 11: حدد دالة أصلية للدالة f على المجال I

$$I = \mathbb{R}; f(x) = 2e^{3x} - e^{-x} \quad .1$$

$$I =]0; +\infty[; f(x) = \frac{e^{2x}}{(e^{2x} - 1)^2} \quad .2$$

$$I = \mathbb{R}; f(x) = e^x (e^x - 1)^3 \quad .3$$

تمرين 1: ليكن a عددا حقيقيا، و b عددا من \mathbb{R}^{*+} بسط ما يلي :

$$B = \frac{(e^a)^5 \times e^{3-a}}{\left(e^{1+\frac{3}{2}a}\right)^2} \quad \text{و} \quad A = e^{\ln(b)} - \ln(2e^b) - \ln\left(\frac{e}{2}\right)$$

نضع: $f(x) = e^x - 2e^{\frac{x}{2}}$ أحسب $f(2 \ln 3)$

تمرين 2: بسط ما يلي: $A = e^{-x} \times e^{2x}$

$$C = \sqrt{e^{2x}} \times e^{-x} \quad B = (e^{2-x})^2 \times e^{3x-4}$$

$$E = e^{2x} \left((e^x + e^{-x})^2 + (e^x - e^{-x})^2 \right), \quad D = \frac{e^{2x} \times e^{3x}}{(e^x)^4}$$

تمرين 3: حدد مجموعة تعريف الدوال المعرفة كالتالي :

$$g(x) = \frac{3x-1}{(e^x)^2 - 1} \quad \text{و} \quad f(x) = e^{\frac{3x-1}{x^2-2x}}$$

تمرين 4: حل في \mathbb{R} المعادلات التالية:

$$e^{2x} - 5e^x + 6 = 0 \quad (3) \quad \frac{e^{2-x}}{e^{1+2x}} = e^{x-1} \quad (2) \quad e^{1-x} \times e^{2x} = e \quad (1)$$

تمرين 5: حل في \mathbb{R} المتراحات التالية:

$$\frac{1}{e^{x+1}} \geq e^{1-x^2} \quad (2) \quad e^{-3-x} \times e^{1+2x} > \frac{1}{e^x} \quad (1)$$

تمرين 6: حل في \mathbb{R}^2 النظمات التالية:

$$(S_2) \begin{cases} e^x e^y = 10 \\ \frac{e^x}{e^y} = \frac{2}{5} \end{cases} \quad (2) \quad (S_1) \begin{cases} 2e^x + 3e^y = 8 \\ e^x + e^y = 3 \end{cases} \quad (1)$$

تمرين 7: أحسب النهايات التالية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} (2x - 1)e^x$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3x}{x^3} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + 3}{x} \quad (2)$$

تمرين 8: أحسب النهايات التالية :

تطبيق الخاصية: $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0^+$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x+1} \quad (3) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x+1} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x + 1}{e^x + 2} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x+1}{x^3+5}} \quad (5) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x + e^{-x} \quad (4)$$

تطبيق الخاصية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$

$$I = [0; \pi]; f(x) = \sin x e^{\cos x} \quad 4$$

$$I =]0; +\infty[\quad f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x} \quad 5$$

تمرين 12: نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي:
 $f(x) = e^{2x} - 2e^x$

1. أدرس تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها
2. حدد دالة أصلية للدالة f على \mathbb{R}

تمرين 13: أحسب $f'(x)$ في الحالات الآتية على المجال I

$$1. \quad f(x) = e^{x^2-3x}, \quad I = \mathbb{R}$$

$$2. \quad f(x) = (x-1)e^{\frac{1}{x}}; I =]0; +\infty[$$

$$3. \quad f(x) = x - \frac{e^x - 1}{e^x + 1}; I = \mathbb{R}$$

تمرين 14: حل في \mathbb{R} المعادلات و المتراجحات الآتية:

$$5 \times 2^x + 2^{x+1} - 336 = 0 \quad (3 \quad 3^x = 12 \quad (2 \quad 2^{x+1} = 8^x \quad (1$$

$$(0,5)^{2x} \geq (0,5)^{x+1} \quad (5 \quad 2^{x-1} > 4^x \quad (4$$

تمرين 15: حل في \mathbb{R} المعادلة الآتية: $100^x + 40 = 14 \times 10^x$

تمرين 16: لتكن f الدالة العددية المعرفة ما يلي:

$$f(x) = (x-1)e^x$$

1. حدد D_f أحسب النهايات عند محداث D_f
2. أحسب $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f
3. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$
4. أدرس تقعر (C)
5. أنشئ المنحنى (C)

تمرين 17: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

$$\text{لتكن } f \text{ الدالة المعرفة كالتالي: } f(x) = x - 1 + \frac{3}{e^x + 1}$$

1. حدد D_f و أحسب النهايات عند محداث D_f
2. حدد تغيرات f و أعط جدول التغيرات
3. تحقق من أن: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) = x + 2 - \frac{3e^x}{e^x + 1}$
4. حدد معادلة المقاريبين المائلين لمنحنى f (مع تحديد الوضع النسبي)

تمرين 18: لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي:

$$f(x) = (e^x - 4)\sqrt{e^x - 1}$$

1. أحسب النهاية: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
2. بين أن لكل x من \mathbb{R}_+^* : $\frac{f(x)}{x} = \frac{e^x - 4}{\sqrt{e^x - 1}} \cdot \frac{e^x - 1}{x}$
3. أدرس قابلية اشتقاق الدالة f على اليمين في النقطة 0 ثم أعط تاويلا هندسيا للنتيجة المحصل عليها
4. بين أن لكل x من \mathbb{R}_+^* : $f'(x) = \frac{3e^x(e^x - 2)}{2\sqrt{e^x - 1}}$

5. أدرس إشارة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

6. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C) بجوار $+\infty$

7. أحسب $f(2 \ln 2)$ ثم أنشئ المنحنى (C)

تمرين 19: لتكن f الدالة العددية المعرفة على \mathbb{R}^+ بما يلي:

$$f(x) = \frac{e^x}{\sqrt{1 - e^{2x}}}$$

1. حدد D_f و أحسب النهايات عند محداث D_f
2. أدرس تغيرات الدالة f ثم أعط جدول تغيراتها
3. بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده
4. حدد $f^{-1}(x)$ $\forall x \in J$

تمرين 20: نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f(x) = 1 - \ln(1 + e^{-x})$$

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم

$$\|\vec{i}\| = 2cm \quad (O; \vec{i}, \vec{j})$$

1. أ. بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ ما هو التأويل الهندسي

للنتيجة المحصل عنها ؟

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty \quad \text{ب. بين أن}$$

2. أ. بين أن $\forall x \in \mathbb{R}; f(x) = x + 1 - \ln(1 + e^x)$

ب. استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 1$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج. حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D)

$$3. \quad \text{أ. بين أن } f'(x) = \frac{1}{1 + e^x} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

ب. ضع جدول تغيرات الدالة f

ج. ادرس تقعر المنحنى (C)

د. بين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصل في نقطة

ينبغي تحديد أفصولها x_0 .

4. أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

5. أ. بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال J ينبغي تحديده

ب. أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين 21: نعتبر الدالة f المعرفة على \mathbb{R} بما يلي :

$$f(x) = 3 - \ln(1 + e^{-x})$$

ليكن (C) التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم

$$\|\vec{i}\| = 2cm \quad (O; \vec{i}, \vec{j})$$

1. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ما هو التأويل الهندسي

للنتائج المحصل عنها ؟

(2) أ. بين أن

$$\forall x \in \mathbb{R} ; f(x) = x + 3 - \ln(1 + e^x)$$

ب. استنتج أن المستقيم (D) ذو المعادلة $y = x + 3$ مقارب مائل بجوار $-\infty$.

ج. حدد الوضع النسبي للمنحنيين (C) و (D).

$$(3) \text{ أ. بين أن } \forall x \in \mathbb{R} ; f'(x) = \frac{1}{1 + e^x}$$

ب. ضع جدول تغيرات الدالة f.

ج. ادرس تقعر المنحنى (C).

د. بين أن المنحنى (C) يقطع محور الأفاصيل في نقطة ينبغي تحديد أفصولها x_0 .

(4) أنشئ المنحنى (C) في المعلم $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

(5) أ. بين أن f تقابل من \mathbb{R} نحو مجال J ينبغي تحديده.

ب. أحسب $f^{-1}(x)$ لكل x من J.

تمرين 22: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

$$\text{لتكن } f \text{ الدالة المعرفة على } \mathbb{R} \text{ بما يلي: } f(x) = \frac{e^{2x} + 1}{(e^x + 1)^2}$$

1. تحقق من أن f دالة زوجية

2. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ثم أول هندسيا هذه النتيجة

3. أحسب $f'(x)$ لكل x من \mathbb{R} ثم استنتج تغيرات f

$$4. \text{ بين أنه لكل } f''(x) = \frac{-2e^x(e^{2x} - 4e^x + 1)}{(e^x + 1)^4}$$

5. استنتج أن (C_f) يقبل نقطتي انعطاف يجب تحديدهما

6. أرسم (C_f)

$$(\ln(2 - \sqrt{3}) = -1,3 \text{ و } \ln(2 + \sqrt{3}) = 1,3 \text{ نأخذ:})$$

تمرين 23: تعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x}{\ln(-x)}; x \in]-\infty; -1[\cup]-1; 0[\\ f(0) = 0 \\ f(x) = e^{-x} + x - 1; x \in]0; +\infty[\end{cases}$$

(C) هو التمثيل المبياني للدالة f في معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1. بين أن الدالة f متصلة في النقطة $x_0 = 0$

2. بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق في النقطة $x_0 = 0$

3. أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$ و أعط تأويلا هندسيا

4. أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ و بين أن (C) تقبل مقاربا مائلا بجوار $+\infty$

5. ادرس تغيرات الدالة f.

6. أنشئ (C)

تمرين 24: المستوى منسوب إلى معلم متعامد ممنظم $(O; \vec{i}; \vec{j})$ بحيث : $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2cm$ وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على \mathbb{R}^* كالتالي :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} e^{x-1}; x < 1; x \neq 0 \\ f(x) = 1 - (\ln x)^3; x \geq 1 \end{cases}$$

(1) بين أن f متصلة في 1

(2) أحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$$

(3) ادرس الفروع اللانهائية ل (C)

(4) بين أن f قابلة للاشتقاق في 1

$$(5) \text{ بين أن: } \begin{cases} f'(x) = \frac{x-1}{x^2} e^{x-1} \\ f'(x) = \frac{-3(\ln x)^2}{x} \end{cases}$$

(6) ادرس تغيرات f و حدد جدول تغيرات

$$(7) \text{ بين أن: } \forall x \geq 1 \quad f''(x) = \frac{3 \ln x}{x^2} (\ln x - 2)$$

(8) حدد نقط انعطاف (C) إذا كان : $x \geq 1$

(9) أنشئ المنحنى (C)

(10) أ) بين أن الدالة h قصور f على المجال $I =]1; +\infty[$

تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J يجب تحديده

$$\forall x \in J \quad h^{-1}(x) \text{ حدد (ب)}$$

(11) أ) باستعمال مكاملة بالأجزاء بين أن :

$$\int_1^e (\ln x)^3 dx = 6 - 2e \quad \text{و أن:} \quad \int_1^e (\ln x)^2 dx = e - 2$$

ب) استنتج المساحة الهندسية للجزء من المستوى المحصور

بين المنحنيين (C) و (Δ) والمستقيمين : $x = e$ و $x = 1$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement aux calculs et exercices que l'on devient un mathématicien

