I. تقديم الدالة $f(x)=\exp(x)=e^{x}$ (الأسية النبرية):

تقديم الدالة الأسية النبري :

1. نشاط : لنعتبر الدالة العددية المعرفة ب:

$$f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto f(x)=\ln(x)$$

- هل f تقابل من المجال $I=]0,+\infty[$ إلى مجال J ؟ علل جوابك مع تحديد J.

2. مفردات:

الدالة العكسية f^{-1} ل f تسمى الدالة الأسية النبرية (أو الدالة الأسية) ويرمز لها ب: $\exp$ أو e .

ولهذا نكتب:
$$f^{-1}=\exp=e: \mathbb{R} \to]0,+\infty[$$
$$x \mapsto f^{-1}(x)=\exp(x)=e^{x}$$

3. تعريف و خاصية:

الدالة العددية المعرفة ب : $f(x)=\ln(x)$ متصلة و تزايدية قطعا على المجال $]0,+\infty[$ و منه الدالة $f(x)=\ln(x)$ تقابل من $]0,+\infty[$ إلى $\mathbb{R}$. الدالة العكسية f^{-1} ل f تسمى الدالة الأسية النبرية (أو الدالة الأسية) و يرمز لها ب: $\exp$ أو e .

الدالة الأسية معرفة كما يلي :
$$f^{-1}=\exp=e: \mathbb{R} \to]0,+\infty[$$
$$x \mapsto f^{-1}(x)=\exp(x)=e^{x}$$

4. ملحوظة :

- العلاقة التي تربط $f(x)=\ln(x)$ و $f^{-1}(x)=\exp(x)=e^{x}$ هي : $\left\{\begin{array}{l} x=\ln(y) \\ y>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} \exp(x)=e^{x}=y \\ x\in\mathbb{R} \end{array}\right\}$
- لدينا: $\forall x\in]0,+\infty[: f^{-1}\circ f(x)=x \Leftrightarrow f^{-1}(f(x))=x$ إذن : $\forall x\in]0,+\infty[\ ,\ \exp\circ\ln(x)=x \Leftrightarrow \exp(\ln(x))=x$
- لدينا: $\forall x\in\mathbb{R} : f\circ f^{-1}(x)=x \Leftrightarrow f(f^{-1}(x))=x$ إذن : $\forall x\in\mathbb{R}\ ,\ \ln\circ\exp(x)=x \Leftrightarrow \ln(\exp(x))=x$.

5. كتابة جديدة :

- نعلم أن : $\forall r\in\mathbb{Q}\ ,\ r=\ln(e^{r})$ (1) إذن : $\exp(r)=e^{r}$, $\forall r\in\mathbb{Q}$ $\Leftrightarrow \exp(r)=\exp(\ln(e^{r}))$, $(1)\Leftrightarrow \forall r\in\mathbb{Q}$

ومنه نحصل على : $\forall r\in\mathbb{Q} : \exp(r)=e^{r}$

و هذا يدفعنا لتمديد هذه الكتابة على باقي الأعداد الحقيقية x ومنه : نكتب $\forall x\in\mathbb{R} : \exp(x)=e^{x}$

6. نتائج:

	الدالة $f(x)=\exp(x)=e^{x}$		
1	معرفة على $D_f=\mathbb{R}$	5	$\forall x>0 : e^{\ln(x)}=x$
2	متصلة على $D_f=\mathbb{R}$ و قابلة للاشتقاق على $D_f=\mathbb{R}$	6	$\forall x\in\mathbb{R} : \ln(e^{x})=x$
3	تزايدية قطعا على المجال $D_f=\mathbb{R}$.	7	$\forall a,b\in\mathbb{R} : a=b \Leftrightarrow e^{a}=e^{b}$
4	$\left\{\begin{array}{l} x=\ln(y) \\ y>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} y=e^{x} \\ x\in\mathbb{R} \end{array}\right\}$	8	$\forall a,b\in\mathbb{R} : a<b \Leftrightarrow e^{a}<e^{b}$

7. أمثلة :

1. $e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$
2. $e^{\ln(24)} = 24$ و $\ln\left(e^{-13}\right) = -13$ و $e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln(3)$.
3. $e^{x+3} = e^{2x+7} \Leftrightarrow x+3 = 2x+7$ و $e^{x+1} < e^{6x-2} \Leftrightarrow x+1 = 6x-2$

8. إشارة e^x :

$\forall x \in \mathbb{R} : e^x > 0$ (إشارة e^x موجبة قطعا)

x	$-\infty$ $+\infty$
e^x	$+$

9. تطبيق:

1) حدد مجموعة تعريف: $f(x) = \dfrac{2}{e^x}$ و $f(x) = \sqrt{e^x}$

2) حل المعادلة: $e^{2x} - e^{(x-1)} = 0$

3) حل المتراجحة: $e^{2x} - e^{(x-1)} \le 0$

II. خاصيات $f(x) = \exp(x) = e^x$

خاصيات جبرية :

1. خاصيات :

	لكل a و b من $\mathbb{R}$	مثال		لكل x من $\mathbb{R}$ و r من $\mathbb{Q}$	مثال
1	$e^{a+b} = e^a \times e^b$	$e^7 = e^4 \times e^3$	4	$\left(e^x\right)^r = e^{rx}\ \left(r \in \mathbb{Q}\right)$	$\left(e^x\right)^3 = e^{3x}$
2	$e^{-b} = \dfrac{1}{e^b}$	$e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$	5	$\sqrt{e^x} = e^{\frac{1}{2}x}$	$\sqrt{e^{x-3}} = e^{\frac{1}{2}(x-3)}$
3	$e^{a-b} = \dfrac{e^a}{e^b}$	$e^5 = \dfrac{e^7}{e^2}$	6	$\sqrt[3]{e^x} = e^{\frac{1}{3}x}$	$\sqrt[3]{e^{2+2x}} = e^{\frac{1}{3}(2+2x)}$

2. برهان : ل : $e^{a+b} = e^a \times e^b$

ليكن a و b من $\mathbb{R}$ نضع : $A = e^{a+b}$ و $B = e^a \times e^b$.

ومنه :

$$A = e^{a+b} \Leftrightarrow \ln(A) = \ln\left(e^{a+b}\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln(A) = a+b \quad , \quad (1)$$
$$B = e^a \times e^b \Leftrightarrow \ln(B) = \ln\left(e^a \times e^b\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln(B) = \ln\left(e^a\right) + \ln\left(e^b\right)$$
$$\Leftrightarrow \ln(B) = a+b \quad , (2)$$

حسب (1) و (2) نحصل على $\ln(A) = \ln(B)$ إذن : $A = B$ أي $e^{a+b} = e^a \times e^b$.

خلاصة : $e^{a+b} = e^a \times e^b$

3. ملحوظة:

الكتابة : $e^x \times e^x = \left(e^x\right)^2 = e^{2x}$ و $e^x \times e^x \times e^x = \left(e^x\right)^3 = e^{3x}$.

بصفة عامة : $\underbrace{e^x \times e^x \times \cdots \times e^x}_{n} = \left(e^x\right)^n = e^{nx}$

III. مشتقة الدالة الأسية:

1. خاصية:

الدالة : $f(x)=e^x$ قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ و لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}:(e^x)'=e^x$.

بمأن الدالة $f(x)=\ln(x)$ قابلة للاشتقاق على $I=]0,+\infty[$. و دالتها المشتقة $f'(x)=\frac{1}{x}$ لا تنعدم على هذا المجال فإن دالتها العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

لدينا : $\forall x\in\mathbb{R}:\ (e^x)'=(f^{-1})'(x)=\dfrac{1}{f'\circ f^{-1}(x)}=\dfrac{1}{f'(e^x)}=\dfrac{1}{\frac{1}{e^x}}=e^x$.

خلاصة : $\forall x\in\mathbb{R}:(e^x)'=e^x$

2. خاصية:

$u(x)$ دالة قابلة للاشتقاق على مجال I فإن الدالة $f(x)=e^{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على I و دالتها المشتقة تحقق ما يلي:

$f'(x)=\left[e^{u(x)}\right]'=u'(x)e^{u(x)}$

- تطبيق: أحسب الدالة المشتقة ل: $f(x)=e^{5x^3+3x}$

جواب : $f'(x)=\left[e^{5x^3+3x}\right]'=\left(5x^3+3x\right)'\times e^{5x^3+3x}=\left(15x^2+3\right)e^{5x^3+3x}$

3. ملحوظة:

الدوال الأصلية للدالة ل : $g(x)=u'(x)e^{u(x)}$ هي الدوال التي على شكل: $G(x)=e^{u(x)}+c\ ;\ (c\in\mathbb{R})$

4. تطبيق:

نجد الدوال الأصلية ل: $f(x)=x.e^{3x^2+1}$ هي $F(x)=\frac{1}{6}e^{3x^2+1}+c$

IV. نهايات اعتيادية ل $f(x)=e^x$

1. نهايات اعتيادية

نهايات $f(x)=e^x$	تأويل الهندسي لنتيجة
$\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0^+$	الدالة f تقبل مقارب أفقي معادلته: $y=0$ (اي محور الأفاصيل) بجوار $-\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty$	ومنه يجب دراسة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$
$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}=+\infty$	الدالة f تقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأراتيب بجوار $+\infty$.

نهايات يجب معرفتها

1	$\lim\limits_{x\to-\infty}x\times e^x=0^-$
2	$\lim\limits_{x\to0}\frac{e^x-1}{x}=1$
3	$\lim\limits_{x\to-\infty}x^n\times e^x=0$ مع $(n\in\mathbb{N}^*)$
4	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ مع $n\in\mathbb{N}^*$

2. برهان :

أ – لنهاية اعتيادية : مثلا : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$. (يمكن استنتج هذه النهاية من خلال $f(x)=\ell n(x)$ و دالتها العكسية $f^{-1}(x)=e^x$)

نضع : $e^x=X$ إذن : $x\to+\infty$ فإن : $X\to+\infty$ و كذلك $x=\ell n(X)$.

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=\lim\limits_{X\to+\infty}\ell n(X)=+\infty$.

خلاصة : $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

ب – لنهاية يجب معرفتها : مثلا : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=+\infty$ مع $n\in\mathbb{N}^*$.

نضع : $X=\frac{x}{n}$ إذن : $x\to+\infty$ فإن : $X\to+\infty$.

ومنه : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{nX}}{(nX)^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(e^X)^n}{(nX)^n}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^X}{nX}\right)^n=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{n^n}\left(\frac{e^X}{X}\right)^n=+\infty$

3. تطبيق1 :

تطبيق 1 : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}$

طريقة1 : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x\times e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}\times e^x=+\infty$

طريقة2 : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}=\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$ مع $t=2x$

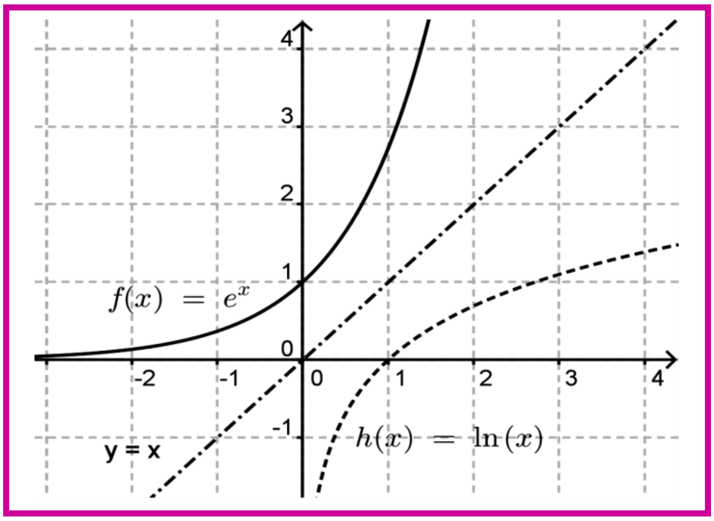
تطبيق2 : أحسب : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x+2x}{x^3}$

V. دراسة الدالة $f(x)=e^x$:

جدول تغيرات f :

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
f '	+
f	0 ↗ $+\infty$

إنشاء منحنى الدالة f في م. م. م $(0,\vec{i},\vec{j})$



VI. الدالة الأسية للأساس a مع: $a \in]0,1[\cup]1,+\infty[$:

1. تعريف:

ليكن a من $]0,1[\cup]1,+\infty[$. الدالة المعرفة كما يلي: $\forall x > 0 , \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$ هي متصلة و رتيبة قطعا على $]0,+\infty[$ هي تقابل و تقابلها العكسي f^{-1} يسمى الدالة الاسية للأساس a و معرفة كما يلي :

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to]0,+\infty[$$
$$x \to f^{-1}(x) = e^{x\ln a}$$

2. توضيح :

$$\begin{aligned} f^{-1}(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \\ &\Leftrightarrow \log_a(y) = x \\ &\Leftrightarrow \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = x \\ &\Leftrightarrow \ln(y) = x\ln(a) \\ &\Leftrightarrow y = e^{x\ln(a)} \end{aligned}$$

إذن : $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow e^{x\ln(a)} = y$.

3. كتابة جديدة ل $f^{-1}(x) = e^{x\ln a}$:

نأخذ : r من $\mathbb{Q}$ نحصل على $f^{-1}(r) = e^{r\ln a} = e^{\ln a^r} = a^r$.

وهذا يدفعنا لتمديد هذه الكتابة على باقي الأعداد الحقيقية x ومنه : نكتب $\forall x \in \mathbb{R} , f^{-1}(x) = e^{x\ln a} = a^x$

خلاصة : $\forall x \in \mathbb{R} ,\ e^{x\ln a} = a^x$.

4. مثال :

$5^x = e^{x\ln 5}$ و $\left(\frac{1}{5}\right)^x = e^{-x\ln 5}$ و $10^x = e^{x\ln 10}$.

5. ملحوظة : لكل x من $\mathbb{R}$: $\log_a(a^x) = x$. و لكل $x > 0$: $a^{\log_a(x)} = x$ و $10^x = y \Leftrightarrow x = \text{Log}(y)$

6. تذكير لمراحل تعريف الأس :

- القوة ذات الأس الصحيح الطبيعي : $a^n = \underbrace{a \times a \times \dots\dots\dots \times a}_{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ مع $a^1 = a$ و $a^0 = 1$.
- القوة ذات الأس الصحيح النسبي : $\forall p > 0 , a^p = \underbrace{a \times a \times \dots\dots\dots \times a}_{p}$ و $(a \neq 0)$, $\forall p < 0 , a^p = \frac{1}{a^{-p}}$ مع $a^1 = a$ و $a^0 = 1$.
- القوة ذات الأس الجذري : $r = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ (مع $p \in \mathbb{Z}$ و $q \in \mathbb{N}^*$) $(a > 0)$, $\forall r \in \mathbb{Q} , a^r = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p}$.
- القوة ذات الأس عدد حقيقي $(a > 0)$, $\forall x \in \mathbb{R} , a^x = e^{x\ln a}$

7. نتائج:

ليكن a من $]0,1[\cup]1,+\infty[$ و الدالة $f(x)=a^x=e^{x\ln a}$

1) f معرفة و متصلة و قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

2) $[f(x)]'=(a^x)'=(\ln(a))\times e^{x\ln a}=(\ln(a))\times a^x$

3) ومنه إشارة: $[f(x)]'=(a^x)=(\ln(a))\times a^x$ هي إشارة $\ln a$:

- إذا كان: $0<a<1$ فإن: $f(x)=a^x=e^{x\ln a}$ تناقصية ؛ ومنه : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a^x<a^y \Leftrightarrow x>y$.
- إذا كان : $a>1$ فإن : $f(x)=a^x=e^{x\ln a}$ تزايدية ؛ ومنه : $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a^x<a^y \Leftrightarrow x<y$

8. خاصيات :

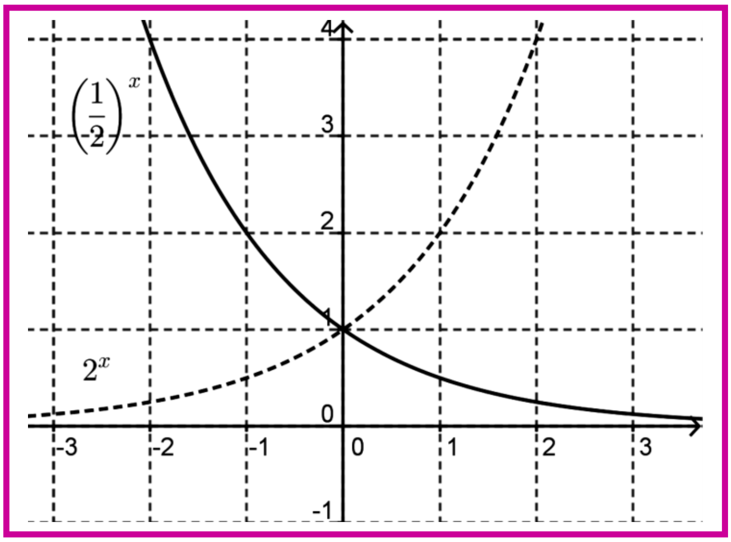
لكل x و y من $\mathbb{R}$:

- $a^x=a^y \Leftrightarrow x=y$
- $a^x\times a^y=a^{x+y}$ و $\frac{1}{a^x}=a^{-x}$ و $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$ و $(a^x)^y=a^{xy}$

إنشاء منحنى الدالة: f في معلم متعامد ممنظم $(0,\vec{i},\vec{j})$ مع

حالة 1 : $0<a<1$ نأخذ: $f(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$

حالة 2 : $a>1$ نأخذ : $f(x)=2^x$.



9. مثال :

1) أكتب الدالة الآتية باستعمال الدالة الأسية النبرية : $f(x)=3^{x^3-x}$

2) حدد مجموعة تعريف f.

3) أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

4) ثم أحسب الدالة المشتقة f' ل f.