

السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية	الأعداد العقدية	سلسلة 2
تمرين 1 : اكتب الأعداد التالية على شكلها المثلثي .		
$z_1 = 3 + 3i = 3(1 + i) = 3\sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = 3\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{p}{4}\right) + i \sin\left(\frac{p}{4}\right)\right) = \left[3\sqrt{2}; \frac{p}{4}\right]$		
$z_2 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{p}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{p}{4}\right)\right) = \left[\sqrt{2}; -\frac{p}{4}\right]$		
$z_3 = -\sqrt{3} - i = 2\left(\frac{-\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(\frac{7p}{6}\right) + i \sin\left(\frac{7p}{6}\right)\right) = \left[2; \frac{7p}{6}\right]$		
$z_4 = -\sqrt{2} + \sqrt{6}i = 2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{2p}{3}\right) + i \sin\left(\frac{2p}{3}\right)\right) = \left[2\sqrt{2}; \frac{p}{3}\right]$		
$z_5 = 13 = 13 \times 1 = (\cos(0) + i \sin(0)) = [13; 0]$		
$z_6 = -7 = 7 \times (-1) = (\cos(p) + i \sin p) = [7; p]$		
$z_7 = 11i = 11 \times i = \left(\cos\left(\frac{p}{2}\right) + i \sin\left(\frac{p}{2}\right)\right) = \left[11; \frac{p}{2}\right]$		
$z_8 = \frac{-i}{4} = \frac{1}{4} \times (-i) = \frac{1}{4}\left(\cos\left(-\frac{p}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{p}{2}\right)\right) = \left[\frac{1}{4}; -\frac{p}{2}\right]$		
$z_9 = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}i = \frac{1}{7}(1 + i) = \frac{\sqrt{2}}{7}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \left[\frac{\sqrt{2}}{7}; \frac{p}{4}\right]$		
$z_{10} = \cos(a) - i \sin(a) = \cos(-a) + i \sin(-a) = [1; -a]$		
$z_{11} = -\cos(a) - i \sin(a) = \cos(a + p) + i \sin(a + p) = [1; a + p]$		
$z_{12} = \sin(a) + i \cos(a) = \cos\left(\frac{p}{2} - a\right) + i \sin\left(\frac{p}{2} - a\right) = \left[1; \frac{p}{2} - a\right]$		
$z_{13} = 1 - \cos(2b) + i \sin(2b) = 2\sin^2(b) + 2\sin(b)\cos(b)i = 2\sin(b)(\sin(b) + i \cos(b))$		
$z_{13} = 2\sin(b)\left(\cos\left(\frac{p}{2} - b\right) + i \sin\left(\frac{p}{2} - b\right)\right) = \left[2\sin(b); \frac{p}{2} - b\right]$		
(لأن : $2\sin(b) > 0 \Rightarrow 0, \frac{p}{2} \left[b \in \right)$		
🌟 للتذكير، للحصول على الشكل المثلثي للعدد : $z = a + ib$ نعمل بمعيار العدد z أي نكتب : $z = r\left(\frac{a}{r} + i\frac{b}{r}\right)$ حيث $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ ثم نبحث في جدول القيم الهامة عن الزاوية a التي تحقق : $\cos(a) = \frac{a}{r}$ و $\sin(a) = \frac{b}{r}$ 🌟 ليس من الضروري اتباع الطريقة السابقة في كل الحالات، فمثلا إن تبين لنا عامل مشترك نعمل به أولا ثم نطبق الطريقة على العامل المحصل عليه (مثل z_5 و z_1) 🌟 حالات خاصة : $\forall a \in \mathbb{R}^{+*} \quad a = [a, 0]; -a = [a, p]; ai = \left[a, \frac{p}{2}\right]; -ai = \left[a, -\frac{p}{2}\right]$ 🌟 يمكن استعمال خاصيات الكتابة المثلثية أحيانا لتحديد الشكل المثلثي لعدد عقدي، مثلا :		
$z_3 = -\sqrt{3} - i = -(\sqrt{3} + i) = -2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = [-2; p] \times \left[1; \frac{p}{6}\right] = [-2; p] \times \left[2 \times 1; p + \frac{p}{6}\right] = \left[2; \frac{5p}{6}\right]$		

تمرين 2 :

$$u = \frac{\sqrt{6} + i\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{2}(\sqrt{6} + i\sqrt{2}) = \frac{1}{2}2\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2\sqrt{2}} + i\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left[\sqrt{2}; \frac{p}{6}\right]$$

$$v = 1 - i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}}i\right) = \left[\sqrt{2}; -\frac{p}{4}\right]$$

1

$$z_1 = uv = \left[\sqrt{2} \times \sqrt{2}; \frac{p}{6} + \left(-\frac{p}{4}\right)\right] = \left[2; -\frac{p}{12}\right]$$

$$z_2 = \frac{u}{v} = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}; \frac{p}{6} - \left(-\frac{p}{4}\right)\right] = \left[1; \frac{5p}{12}\right]$$

$$z_3 = u^5 = \left[\sqrt{2}^5; 5 \times \frac{p}{6}\right] = \left[4\sqrt{2}; \frac{5p}{6}\right]$$

$$z_4 = \frac{1}{v^7} = \left[\frac{1}{\sqrt{2}^7}; -7 \times -\frac{p}{4}\right] = \left[\frac{1}{8\sqrt{2}}; \frac{7p}{4}\right]$$

$$z_5 = \frac{v^2}{u^3} = \left[\frac{\sqrt{2}^2}{\sqrt{2}^3}; 2 \times \left(-\frac{p}{4}\right) - 3 \times \frac{p}{6}\right] = \left[\frac{\sqrt{2}}{2}; -p\right]$$

$$z_6 = 5u = [5; 0] \times \left[\sqrt{2}; \frac{p}{6}\right] = \left[5\sqrt{2}; \frac{p}{6}\right]$$

2

$$z_7 = -iv = \left[1; -\frac{p}{2}\right] \times \left[\sqrt{2}; -\frac{p}{4}\right] = \left[1 \times \sqrt{2}; -\frac{p}{2} + \frac{-p}{4}\right] = \left[\sqrt{2}; -\frac{3p}{4}\right]$$

تمرين 3 : المستوى العقدي منسوب إلى م.م.م. $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$. $A(1+3i)$, $B\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i\right)$, $C(1+2i)$

طريقة 1:

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+2i-(1+3i)}{\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i - (1+3i)} = \frac{1+2i-1-3i}{\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i - 1 - 3i} = \frac{-i}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}i\right)^2} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}{1} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \left[1; \frac{p}{3}\right]$$

1

طريقة 2:

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{1+2i-(1+3i)}{\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i - (1+3i)} = \frac{1+2i-1-3i}{\frac{2-\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{2}i - 1 - 3i} = \frac{-i}{-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i} = \frac{i}{\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i}$$

$$\frac{c-a}{b-a} = \frac{\left[1; \frac{p}{2}\right]}{\left[1; \frac{p}{6}\right]} = \left[1; \frac{p}{2} - \frac{p}{6}\right] = \left[1; \frac{p}{3}\right]$$

لدينا : $\frac{c-a}{b-a} = \left[1; \frac{p}{3}\right]$ منه : $\arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{p}{3}[2p]$ و $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1$

إذن : $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{p}{3}[2p]$ و $\left|\frac{c-a}{b-a}\right| = 1$ أي $|b-a| = |c-a|$ منه : $AB = AC$

2

بما أن $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{p}{3}[2p]$ و $AB = AC$ فالمثلث ABC متساوي الأضلاع.

3

تمرين 4 : $w = \frac{u}{v}$, $v = 1+i$, $u = 1+i\sqrt{3}$

	$w = \frac{u}{v} = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} = \frac{(1+i\sqrt{3})(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-i+i\sqrt{3}-i^2\sqrt{3}}{1-i^2} =$ $w = \frac{1+i(-1+\sqrt{3})+\sqrt{3}}{1+1} = \frac{1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)}{2} = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$	1
	لدينا : $v = 1+i = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left[\sqrt{2}; \frac{p}{4}\right]$ و $u = 1+i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left[2; \frac{p}{3}\right]$ منه : $w = \frac{u}{v} = \frac{\left[2; \frac{p}{3}\right]}{\left[\sqrt{2}; \frac{p}{4}\right]} = \left[\frac{2}{\sqrt{2}}; \frac{p}{3} - \frac{p}{4}\right] = \left[\sqrt{2}; \frac{p}{12}\right]$	2
	لدينا حسب السؤال 2 : $w = \left[\sqrt{2}; \frac{p}{12}\right] = \sqrt{2}\left(\cos \frac{p}{12} + i \sin \frac{p}{12}\right) = \sqrt{2} \cos \frac{p}{12} + i \sqrt{2} \sin \frac{p}{12}$ و حسب السؤال الأول : $w = \frac{1+\sqrt{3}}{2} + i\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ إذن : $\begin{cases} \cos \frac{p}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{p}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \end{cases}$ بالتالي : $\begin{cases} \sqrt{2} \cos \frac{p}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2} \\ \sqrt{2} \sin \frac{p}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} \end{cases}$ ومنه : $\tan \frac{p}{12} = \frac{\sin \frac{p}{12}}{\cos \frac{p}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}}{\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{3-1} = \frac{4-2\sqrt{3}}{2} = 2-\sqrt{3}$	3
تمرين 5 : $Z = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$		
	$Z^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2}))^2 = (\sqrt{6} + \sqrt{2})^2 + 2i(\sqrt{6} + \sqrt{2})(\sqrt{6} - \sqrt{2}) + i^2(\sqrt{6} - \sqrt{2})^2$ $Z^2 = 8 + 2\sqrt{12} + 8i - (8 - 2\sqrt{12}) = 4\sqrt{12} + 8i = 8\sqrt{3} + 8i$	1
	$Z^2 = 8\sqrt{3} + 8i = 8(\sqrt{3} + i) = 8 \times 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \left[16; \frac{p}{6}\right]$	2
	نضع : $Z = [r; q]$ حيث : $r \in \mathbb{R}^{+*}$ و $q \in]-0; 2p]$ إذن : $Z^2 = [r^2; 2q]$ نستنتج إذن أن : $r^2 = 16$ منه : $r = 4$ وأن $2q = \frac{p}{6} + 2kp / k \in \mathbb{Z}$ أي : $q = \frac{p}{12} + kp / k \in \mathbb{Z}$ وبما أن : $q \in]0; 2p]$ فإن : $0 < \frac{p}{12} + kp \leq 2p$ منه : $-\frac{p}{12} < kp \leq \frac{23p}{12}$ منه : $-\frac{1}{12} < k \leq \frac{23}{12}$ منه : $k = 0$ أو $k = 1$ ، منه : $q = \frac{p}{12}$ أو $q = \frac{13p}{12}$ لكن ولكون : $\text{Re}(Z) > 0$ فإن : $\cos q > 0$ ، إذن : $q = \frac{p}{12}$ (لأن : $\cos\left(\frac{13p}{12}\right) < 0$) بالتالي : $Z = \left[4; \frac{p}{12}\right]$ تحديد الشكل المثلثي لعدد عقدي انطلاقا من الشكل المثلثي لمربعه أو مكعبه أو بصفة عامة قوة له يتطلب تقنيات خاصة حيث نعطي رموزا لمعياره وعمدته، ثم نحاول تحديدهما مستعملين وحدانية الشكل المثلثي والجبري ، و نحتاج خلال ذلك للتأطير لحصر قيم العدد k وبالتالي حصر قيم العمدة ثم تحديده انطلاقا من إشارة الجزء الحقيقي أو التخيلي	3

	لدينا حسب السؤال 2 : $Z = \left[4 ; \frac{p}{12} \right] = 4 \left(\cos \frac{p}{12} + i \sin \frac{p}{12} \right) = 4 \cos \frac{p}{12} + 4 \sin \frac{p}{12} i$ وحيث أن : $Z = \sqrt{6} + \sqrt{2} + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})$ فإن : $\begin{cases} 4 \cos \frac{p}{12} = \sqrt{6} + \sqrt{2} \\ 4 \sin \frac{p}{12} = \sqrt{6} - \sqrt{2} \end{cases}$ بالتالي : $\begin{cases} \cos \frac{p}{12} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \frac{p}{12} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$ ومنه : $\tan \frac{p}{12} = \frac{\sin \frac{p}{12}}{\cos \frac{p}{12}} = \frac{\frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}}{\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2})^2}{6 - 2} = \frac{8 + 2\sqrt{12}}{4} = 2 + \sqrt{3}$ 👉 لاحظ أن نتائج هذا التمرين تطابق نتائج التمرين السابق	4
--	---	---

رياضيات النجـاح أذ سمير لخريسي