هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

السنة 2 بكالوريا علوم تجريبية	الأعداد العقدية حلول مقترحة	سلسلة 1

تمرين 1 :

$z_1=(5i-1)(i+3)$
$z_1=5i^2+5i-i-3$
$z_1=-5+4i-3$
$z_1=-8+4i$

$z_2=(7i-1)^2$
$z_2=(7i)^2-14i+1$
$z_2-49-14i+1$
$z_2=-48-14i$

$z_3=(i+2)^3$
$z_3=i^3+3\times i^2\times 2+3\times i\times 2^2+2^3$
$z_3=-i-6+12i+8$
$z_3=2+11i$

$z_4=(3-i)^4$
$z_4=\left[(3-i)^2\right]^2$
$z_4=(9-6i+i^2)^2$
$z_4=(9-6i-1)^2$
$z_4=(8-6i)^2$
$z_4=64-96i+(6i)^2$
$z_4=64-96i-36$
$z_4=28-96i$

$z_5=\dfrac{5}{2-i}+\dfrac{3-i}{2+i}$
$z_5=\dfrac{5(2+i)}{2^2-i^2}+\dfrac{(3-i)(2-i)}{2^2-i^2}$
$z_5=\dfrac{10+5i}{4+1}+\dfrac{6-3i-2i+i^2}{4+1}$
$z_5=\dfrac{10+5i+6-5i-1}{5}=\dfrac{15}{5}=3$

$z_6=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^{10}$
$z_6=\left(\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right)^5$
$z_6=\left(\dfrac{2}{4}+i-\dfrac{2}{4}\right)^5$
$z_6=i^5=i^2\times i^2\times i=i$

في كل الحسابات نطبق القواعد المعروفة في المجموعة IR من نشر و تعميل و متطابقات و ... مع استعمال المتساوية $i^2=-1$ دون تحديد قيمة معينة للعدد العقدي i فهو أساس بناء مجموعة الأعداد العقدية.

تمرين 2 : لنحل في C المعادلات :

لدينا : $\begin{cases} z+i=-2z+7 \\ z+2z=7-i \end{cases}$ منه : $\begin{cases} 3z=7-i \\ z=\dfrac{7}{3}-\dfrac{1}{3}i \end{cases}$ منه : $S=\left\{\dfrac{7}{3}-\dfrac{1}{3}i\right\}$

لدينا : $\begin{cases} i-z=iz-3 \\ -z-iz=-3-i \\ -z(1+i)=-3-i \end{cases}$ منه : $z=\dfrac{3+i}{1+i}$ منه : $z=\dfrac{(3+i)(1-i)}{1^2-i^2}$ منه : $z=\dfrac{3-3i+i-i^2}{1+1}$ منه : $z=\dfrac{4-2i}{2}$ منه : $z=2-i$ منه : $S=\{2-i\}$

لدينا : $\begin{cases} \dfrac{3\bar{z}}{z+1}=i \\ 3\bar{z}=i(\bar{z}+1) \\ 3\bar{z}=i\bar{z}+i \\ 3\bar{z}-i\bar{z}=i \\ (3-i)\bar{z}=i \end{cases}$ منه : $\bar{z}=\dfrac{i}{3-i}$ منه : $\bar{z}=\dfrac{i(3+i)}{9+1}$ منه : $\bar{z}=\dfrac{-1+3i}{10}$ منه : $\bar{z}=\dfrac{-1}{10}+\dfrac{3}{10}i$ إذن : $z=\dfrac{-1}{10}-\dfrac{3}{10}i$ منه : $S=\left\{\dfrac{-1}{10}-\dfrac{3}{10}i\right\}$

بوضع $z=x+iy$ نجد :

$5z+7\bar{z}+4i-3=0$
$5(x+iy)+7(x-iy)+4i-3=0$ منه : $\begin{cases} 12x=3 \\ -2y=-4 \end{cases}$ منه : $\begin{cases} x=\dfrac{1}{4} \\ y=2 \end{cases}$ منه : $z=\dfrac{1}{4}+2i$ بالتالي : $S=\left\{\dfrac{1}{4}+2i\right\}$
$5x+5iy+7x-7iy+4i-3=0$
$12x-2iy=3-4i$

في المثالين الأولين اتبعنا نفس الطرق المتبعة في حل معادلة من الدرجة الأولى في IR ، في المثال الثالث وجدنا بنفس الطرق مرافق z و

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

بعد ذلك حددنا قيمة هذا الأخير (للتذكير مرافق $z=a+ib$ هو $\bar{z}=a-ib$)

أما المثال الأخير فتوجب استعمال طريقة مغايرة لكونه يحتوي على المجهول و مرافقه و تم خلال هذه الطريقة استعمال الخاصية :

$$a+ib=a'+ib' \Rightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$$

تمرين 3 : $z_1=\dfrac{5+4i}{5-4i}+\dfrac{5-4i}{5+4i}$ ، $z_2=(1+2i)^3-(1-2i)^3$

1

لدينا: $z_1=\dfrac{5+4i}{5-4i}+\dfrac{5-4i}{5+4i}$ منه : $\bar{z}_1=\overline{\left(\dfrac{5+4i}{5-4i}\right)}+\overline{\left(\dfrac{5-4i}{5+4i}\right)}=\dfrac{5-4i}{5+4i}+\dfrac{5+4i}{5-4i}=z_1$ إذن : $z_1\in IR$

لدينا: $z_2=(1+2i)^3-(1-2i)^3$ منه : $\bar{z}_2=\overline{(1+2i)^3}-\overline{(1-2i)^3}=(1-2i)^3-(1+2i)^3=-z_2$

إذن : $z_2\in i\,IR$

استعملنا الخاصيتين : $z\in IR \Leftrightarrow \bar{z}=z$ و $z\in i\,IR \Leftrightarrow \bar{z}=-z$

2

$$z_1=\frac{5+4i}{5-4i}+\frac{5-4i}{5+4i}=\frac{(5+4i)^2}{25+16}+\frac{(5-4i)^2}{25+16}$$

$$z_1=\frac{25+40i-16+25-40i-16}{41}=\frac{18}{41}$$

$$z_2=(1+2i)^3-(1-2i)^3$$

$$z_2=1^3+3\times1^2\times(2i)+3\times1\times(2i)^2+(2i)^3-\left(1^3-3\times1^2\times(2i)+3\times1\times(2i)^2-(2i)^3\right)$$

$$z_2=1+6i-12-8i-[1-6i-12+8i]$$

$$z_2=1+6i-12-8i-1+6i+12-8i$$

$$z_2=-4i$$

تمرين 4 : $j=\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$j^2+j+1=\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{1}{4}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{3}{4}+\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}+1=\frac{-2}{4}+\frac{-1}{2}+1=0$$

لنستنتج أن: $j^3=1$

1

طريقة 1	طريقة 2
$j^3-1=(j-1)(j^2+j+1)=(j-1)\times0=0$ منه : $j^3=1$	بما أن $j^2=-j-1$ ، فإن : $j^3=j\,j^2=j(-j-1)$ $j^3=-j^2-j=-(-j-1)-j=j+1-j=1$

2

$$j^{11}=j^9\times j^2=(j^3)^3\times(-j-1)=1\times(-j-1)=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}-1=\frac{-1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

تمرين 5 : $A\left(\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $B\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ و $E(1+i)$ و $F(3+2i)$ و $H(-1+5i)$

1

لدينا: $OA=|z_A-z_O|=\left|\dfrac{-1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$

و $OB=|z_B-z_O|=\left|\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=\sqrt{1}=1$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

$$AB=|z_B-z_A|=\left|\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\left(\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right|=\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right|=|1|=\sqrt{1^2+0^2}=\sqrt{1}=1$$

منه: $OA=OB=AB=1$ بالتالي : OAB مثلث متساوي الأضلاع

للتذكير : $MN=|z_N-z_M|$ و $|a+ib|=\sqrt{a^2+b^2}$

2

$EF^2=5$	$HF^2=25$	$EH^2=20$
$EF=\|z_F-z_E\|=\|3+2i-(1+i)\|$ $EF=\|3+2i-1-i\|=\|2+i\|$ $EF=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$	$HF=\|z_F-z_H\|$ $HF=\|3+2i-(-1+5i)\|$ $HF=\|3+2i+1-5i\|=\|4-3i\|$ $HF=\sqrt{4^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$	$EH=\|z_H-z_E\|$ $EH=\|-1+5i-(1+i)\|$ $EH=\|-1+5i-1-i\|$ $EH=\|-2+4i\|$ $EH=\sqrt{(-2)^2+4^2}$ $EH=\sqrt{4+16}=\sqrt{20}$

منه: $EF^2+EH^2=HF^2$ بالتالي حسب مبرهنة فيثاغورس العكسية

فالمثلث EFH قائم الزاوية في النقطة E

استعمال بعض التقنيات التي سبق دراستها يكون مفيدا في حل بعض الوضعيات في الهندسة التحليلية العقدية.

3

لنحدد $K(z_K)$ حيث يكون الرباعي $AKEF$ متوازي أضلاع.

لدينا : $AKEF$ متوازي أضلاع يعني : $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{FE}$ منه : $aff\left(\overrightarrow{AK}\right)=aff\left(\overrightarrow{FE}\right)$ أي : $z_K-z_A=z_E-z_F$

$$z_K=z_E-z_F+z_A$$

منه : $$z_K=1+i-(3+2i)+\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=1+i-3-2i+\frac{-1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=-2+\frac{-1}{2}-i+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{-5}{2}+\frac{-2+\sqrt{3}}{2}i$$

يجب كتابة النتيجة على الشكل الجبري : $a+bi$ لذلك نقوم بالتبسيط و ترتيب الحدود ثم التعميل بالعدد i

4

لدينا $G(z_G)$ مركز ثقل المثلث EFH منه : $\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OF}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OH}$

منه : $z_G-z_O=\frac{1}{3}(z_E-z_O)+\frac{1}{3}(z_F-z_O)+\frac{1}{3}(z_H-z_O)$ منه : $z_G=\frac{z_E+z_F+z_H}{3}$ (لأن : $z_O=0$)

بالتالي : $$z_G=\frac{1+i+3+2i-1+5i}{3}=\frac{3+8i}{3}=1+\frac{8}{3}i$$

تمرين 6 : $u=\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$ ، $U(u)$ و $A(1)$ ، $B(2+u^2)$ ، $C(1+u)$.

1

$$z_B=2+\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=2+\frac{2}{4}+2\times\frac{-\sqrt{2}}{2}\times i\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{4}=2-i$$

$$z_C=1+\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2

لنبين أن $OUCA$ متوازي أضلاع

لدينا: $aff\left(\overrightarrow{OU}\right)=z_U-z_O=u-0=u$ و $aff\left(\overrightarrow{AC}\right)=z_C-z_A=1+u-1=u$ ، منه: $aff\left(\overrightarrow{OU}\right)=aff\left(\overrightarrow{AC}\right)$

إذن: $\overrightarrow{OU}=\overrightarrow{AC}$ ، بالتالي: $OUCA$ متوازي أضلاع

3

لنبين أن A و B و C نقط مستقيمية ، لدينا:

$$\frac{z_A-z_B}{z_A-z_C}=\frac{1-(2-i)}{1-(1+u)}=\frac{1-2+i}{1-1-u}=\frac{-1+i}{-u}=\frac{1-i}{u}=\frac{1-i}{\frac{-\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}}=\frac{1-i}{\frac{-\sqrt{2}}{2}(1-i)}=\frac{1}{\frac{-\sqrt{2}}{2}}=-\frac{2}{\sqrt{2}}\in IR$$

بالتالي: A و B و C نقط مستقيمية.

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

4	لنحدد $M(z_M)$ نقطة تقاطع $(O,\vec{e_1})$ و المستقيم (AB) بما أن $M \in (O,\vec{e_1})$ فإن: $z_M = a \,/\, a \in IR$ وبما أن : $M \in (AB)$ فإن A و B و M نقط مستقيمية منه: $\frac{z_A - z_M}{z_A - z_B} \in IR$ ولدينا: $\frac{z_A - z_M}{z_A - z_B} = \frac{1-a}{-1+i} = \frac{(1-a)(1+i)}{(-1+i)(1+i)} = \frac{1-a+(1-a)i}{-2} = \frac{a-1}{2} + \frac{a-1}{2}i$ إذن: $\frac{a-1}{2} = 0$ منه: $a = 1$ بالتالي: $M(1)$	
5	لنحدد $N(z_N)$ نقطة تقاطع $(O,\vec{e_2})$ و المستقيم (AB) بما أن $N \in (O,\vec{e_2})$ فإن: $z_N = bi \,/\, b \in IR$ وبما أن : $N \in (AB)$ فإن A و B و N نقط مستقيمية منه: $\frac{z_A - z_N}{z_A - z_B} \in IR$ ولدينا: $\frac{z_A - z_N}{z_A - z_B} = \frac{1-bi}{-1+i} = \frac{(1-bi)(1+i)}{(-1+i)(1+i)} = \frac{1+i-bi+b}{-2} = \frac{1+b}{-2} + \frac{1-b}{-2}i$ إذن: $\frac{1-b}{-2} = 0$ منه: $b = 1$ بالتالي: $N(i)$	

رياضيـــات النجـــــــاح أذ سمير لخريسي

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma