

الأعداد العقدية

(IV) التمثيل الهندسي لعدد عقدي.

نفترض أن المستوى P منسوب إلى معلم متقاعد ممتزم $(o, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

(1) تعريف:

(a) لكل $M(x, y)$ من P العدد $z = a + ib$ يسمى لحق النقطة M ونكتب $aff(M)$.

(b) لكل $\vec{u}(x, y)$ من $\vec{v}$ العدد $z = a + ib$ يسمى لحق المتجهة $\vec{u}$ ونكتب $aff(\vec{u}) = z$.

(c) لكل $z = a + ib$ من $\mathbb{C}$ النقطة $M(x, y)$ تسمى صورة العدد z في P ونكتب $M(z)$.

(d) لكل $z = a + ib$ من $\mathbb{C}$ المتجهة $\vec{u}(x, y)$ تسمى صورة العدد z في V_2 ونكتب $\vec{u}(z)$.

(ملاحظة: a) $aff(\vec{e}_2) = i$. $aff(\vec{e}_1) = 1$. $aff(o) = 0$

$$\begin{aligned} z \in \mathbb{R} &\Leftrightarrow M(z) \in (x'ox) \\ z \in \mathbb{R}^+ &\Leftrightarrow M(z) \in [ox) \\ z \in \mathbb{R}^- &\Leftrightarrow M(z) \in (x'o] \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} z \in i\mathbb{R} &\Leftrightarrow M(z) \in (y'oy) \\ z \in i\mathbb{R}^+ &\Leftrightarrow M(z) \in [oy) \\ z \in i\mathbb{R}^- &\Leftrightarrow M(z) \in (y'o] \end{aligned} \quad (c)$$

(2) خاصيات:

$$\begin{aligned} aff(M) = aff(M') &\Leftrightarrow M = M' \\ aff(\overline{MM'}) &= aff(M') - aff(M) \\ MM' &= |aff(M') - aff(M)| \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} aff(\vec{u}) = aff(\vec{v}) &\Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v} \\ aff(\vec{u} + \vec{v}) &= aff(\vec{u}) + aff(\vec{v}) \\ aff(\alpha \vec{u}) &= \alpha aff(\vec{u}) \\ \|\vec{u}\| &= |aff(\vec{u})| \end{aligned} \quad (b)$$

(c) ليكن G مرجع $\{(A, \alpha)(B, \beta)\}$ لدينا

$$aff(G) = \frac{1}{\alpha + \beta} (\alpha aff(A) + \beta aff(B))$$

(d) ليكن I منتصف $[AB]$ $aff(I) = \frac{1}{2} (aff(A) + aff(B))$

(e) لتكن A و B و C ثلاث نقط الحاقها على التوالي Z_C, Z_B, Z_A بحيث $A \neq B$ تكون النقط A و B و C مستقيمة إذا وفقط إذا كان

$$\frac{Z_C - Z_A}{Z_B - Z_A} \in \mathbb{R}$$

(I) عموميات.

(1) $\mathbb{C} = \{z = a + ib / (a, b) \in \mathbb{R}^2, i^2 = -1\}$ كل عدد z من $\mathbb{C}$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z = a + ib$ حيث $a, b \in \mathbb{R}$ و i عنصر من $\mathbb{C}$ يحقق $i^2 = -1$ ($i \notin \mathbb{R}$)

(c) * الكتابة $z = a + ib$ تسمى الكتابة الجبرية أو الشكل الجبري للعدد z .

* العدد a يسمى الجزء الحقيقي للعدد z ونكتب $Re(z) = a$

* العدد b يسمى الجزء التخيلي للعدد z ونكتب $Im(z) = b$

* إذا كان $b = 0$ فإن $z = a \in \mathbb{R}$.

* إذا كان $a = 0$ فإن $z = ib \in i\mathbb{R}$ ونقول إن z تخيلي صرف.

(2) ليكن a و b و a' و b' و $\alpha \in \mathbb{R}$

$$a + ib = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$$

$$a + ib = a' + ib' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}$$

(II) مرافق عدد عقدي.

(1) تعريف ليكن $z = a + ib$ من $\mathbb{C}$ مع $a, b \in \mathbb{R}$ نسمي مرافق العدد z العدد الذي نرمز له ب $\bar{z}$ والمعرف بما يلي $\bar{z} = a - ib$.

(2) خاصيات:

$$\begin{aligned} z = z' &\Leftrightarrow \bar{z} = \bar{z}' \\ \bar{\bar{z}} &= z \end{aligned} \quad (b)$$

$$\begin{aligned} \bar{z} = z &\Leftrightarrow z \in \mathbb{R} \\ \bar{z} = -z &\Leftrightarrow z \in i\mathbb{R} \end{aligned} \quad (a)$$

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= \bar{z} \cdot \bar{z}' \\ z_1 z_2 \dots z_n &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot \dots \cdot \bar{z}_n \\ \bar{z}^n &= \bar{z}^n \quad (n \in \mathbb{Z}) \end{aligned} \quad (d)$$

$$\begin{aligned} z \cdot z' &= \bar{z} \cdot \bar{z}' \\ z_1 + z_2 + \dots + z_n &= \bar{z}_1 + \bar{z}_2 + \dots + \bar{z}_n \end{aligned} \quad (c)$$

$$\left(\frac{z}{z'}\right) = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad \text{و} \quad \left(\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{\bar{z}}$$

$$\begin{aligned} z + \bar{z} &= 2x = 2Re(z) \\ z - \bar{z} &= 2iy = 2i Im(z) \end{aligned} \quad \text{و} \quad z\bar{z} = x^2 + y^2 \quad \text{لدينا} \quad z = x + iy$$

(III) معيار عدد عقدي

(1) تعريف: ليكن $z = a + ib$ من $\mathbb{C}$ مع $a, b \in \mathbb{R}$ نسمي معيار العدد z العدد الحقيقي الموجب الذي نرمز له ب $|z|$ والمعرف بما يلي:

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(2) خاصيات:

(a) إذا كان $z = a \in \mathbb{R}$ فإن $|z| = |a|$

إذا كان $z = ib \in i\mathbb{R}$ فإن $|z| = |b|$

$$|z| = |\bar{z}| = |-z| \quad \text{و} \quad |z|^2 = z\bar{z} = a^2 + b^2 \quad (b)$$

$$|z + z'| \leq |z| + |z'| \quad \text{و} \quad |z| = 0 \Leftrightarrow z = 0 \quad (c)$$

$$\begin{aligned} |z^n| &= |z|^n \quad \text{و} \quad |zz'| = |z| |z'| \\ |z_1 z_2 \dots z_n| &= |z_1| |z_2| \dots |z_n| \end{aligned} \quad (d)$$

$$\left|\frac{z}{z'}\right| = \frac{|z|}{|z'|} \quad \text{و} \quad \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|} \quad (e)$$

(ملاحظة: للحصول على الشكل الجبري لعدد عقدي على شكل كسر نتبع ما يلي:

$$\frac{z}{z'} = \frac{z\bar{z}'}{z\bar{z}'} = \frac{z\bar{z}'}{|z'|^2} \quad (*)$$

$$\frac{a + ib}{c + id} = \frac{(a + ib)(c - id)}{(c + id)(c - id)} = \frac{(a + ib)(c - id)}{c^2 + d^2} \quad (*)$$

ملاحظة:

$$\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} = [1, \theta] \text{ إذا كان}$$

$$\frac{AC}{AB} = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = \frac{|z_C - z_A|}{|z_B - z_A|} = 1 \Rightarrow AC = AB$$

$$\left(\overline{AB}, \overline{AC} \right) \equiv \arg \left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A} \right) \equiv 0[2\pi]$$

(6) صيغة Moivre

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos(n\theta) + i \sin(n\theta)$$

(7) صيغة Euler

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2 \cos x \quad \cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$$

$$e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix})$$

ملاحظة: للحصول على الشكل المثلثي لمجموع عددين لهما نفس المعيار هناك طريقتان

الطريقة 1. نستعمل الصيغ المثلثية .

$$z_2 = e^{i\beta} \quad z_1 = e^{i\alpha}$$

$$z_1 + z_2 = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = \cos \alpha + i \sin \alpha + \cos \beta + i \sin \beta$$

$$= \cos \alpha + \cos \beta + i (\sin \alpha + \sin \beta)$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2} + i 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + i \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

$$z_1 - z_2 = \cos \alpha - \cos \beta + i (\sin \alpha - \sin \beta)$$

$$= -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} + i 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$= 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \left(\cos \frac{\alpha + \beta}{2} + i \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \right)$$

الطريقة 2. نستعمل الترميز الأسّي .

$$z_1 + z_2 = e^{i\alpha} + e^{i\beta} = e^{i \frac{\alpha + \beta}{2}} \left(e^{i \frac{\alpha - \beta}{2}} + e^{-i \frac{\alpha - \beta}{2}} \right)$$

$$= e^{i \frac{\alpha + \beta}{2}} 2 \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$z_1 - z_2 = e^{i\alpha} - e^{i\beta} = e^{i \frac{\alpha + \beta}{2}} \left(e^{i \frac{\alpha - \beta}{2}} - e^{-i \frac{\alpha - \beta}{2}} \right)$$

$$= e^{i \frac{\alpha + \beta}{2}} 2i \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

(VI) الجذور النونية لعدد عقدي غير منعدم.

(1) ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ و $n \in \mathbb{N}^*$ نسمي جذر نوني للعدد z كل عدد عقدي يحقق $z^n = Z$.

(2) حلول المعادلة $z^n = a$ هي الجذور النونية للعدد a .

(3) ليكن $Z = [r, \theta]$ من $\mathbb{C}^*$ الجذور النونية للعدد Z هي الأعداد

$$z_k = \left[\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n} \right] / k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

(4) الجذور النونية للعدد 1 هي الأعداد w_k حيث

$$k \in \{0, 1, \dots, n-1\}$$

(V) الشكل المثلثي لعدد عقدي غير منعدم.

(1) ليكن $z \in \mathbb{C}^*$ و $M(z)$ نسمي عمدة العدد z كل قياس

للزاوية $\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM} \right)$. ونرمز له $\arg z$

$$\arg z \equiv \left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{OM} \right) [2\pi] \quad (*)$$

ملاحظة:

$$z \in i\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$z \in i\mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$z \in i\mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$z \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \arg z \equiv 0 [2\pi]$$

$$z \in \mathbb{R}_-^* \Leftrightarrow \arg z \equiv \pi [2\pi]$$

$$z \in \mathbb{R}^* \Leftrightarrow \arg z \equiv k\pi$$

(2) كل عدد z من $\mathbb{C}^*$ يكتب بطريقة وحيدة على شكل $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ حيث $|z| = r$ و $\arg z \equiv \theta [2\pi]$ وهذه الكتابة

تسمى الشكل المثلثي للعدد z ونكتب $z = [r, \theta]$ أو $z = re^{i\theta}$.

(3) ملاحظة: (a) $[r, \theta] = [r', \theta'] \Leftrightarrow r = r'$ و $\theta \equiv \theta' [2\pi]$

(b) للحصول على الشكل المثلثي للعدد $z = a + ib$ نتبع ما يلي

$$z = a + ib = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + i \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta + i \sin \theta) = [\sqrt{a^2 + b^2}, \theta]$$

$$\cos \alpha - i \sin \alpha = \cos(-\alpha) + i \sin(-\alpha) \quad (c)$$

$$-\cos \alpha + i \sin \alpha = \cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha)$$

$$-\cos \alpha - i \sin \alpha = \cos(\pi + \alpha) + i \sin(\pi + \alpha)$$

$$\sin \alpha + i \cos \alpha = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

(4)

$$\arg(zz') \equiv \arg z + \arg z' [2\pi]$$

$$\arg z^n \equiv n \arg z [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{z}{z'}\right) \equiv \arg z - \arg z' [2\pi]$$

$$\arg\left(\frac{1}{z}\right) \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$\arg(\bar{z}) \equiv -\arg z [2\pi]$$

$$[r, \theta] \cdot [r', \theta'] = [rr', \theta + \theta']$$

$$[r, \theta]^n = [r^n, n\theta]$$

$$\frac{[r, \theta]}{[r', \theta']} = \left[\frac{r}{r'}, \theta - \theta' \right]$$

$$\frac{1}{[r, \theta]} = \left[\frac{1}{r}, -\theta \right]$$

$$[r, \theta] = [r, -\theta]$$

$$e^{-i\theta} = e^{-i\theta} \quad (e^{i\theta})^n = e^{in\theta} \quad e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = e^{i(\theta + \theta')}$$

$$\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} \quad \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta - \theta')}$$

$$-i = e^{-i\frac{\pi}{2}} \quad i = e^{i\frac{\pi}{2}} \quad -1 = e^{i\pi} \quad \text{ملاحظة}$$

$$\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{u} \right) \equiv \arg(\text{aff}(\bar{u})) [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \right) \equiv \arg(\text{aff}(\bar{v})) - \arg(\text{aff}(\bar{u})) [2\pi]$$

(5)

$$\left(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{AB} \right) \equiv \arg(z_B - z_A) [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD} \right) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right) [2\pi]$$

VII المعادلات من الدرجة II: خاصة:

نعتبر المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ مع $a \neq 0$
نضع $\Delta = b^2 - 4ac$

1- إذا كان $\Delta = 0$ فإن المعادلة تقبل حلا وحيدا: $z = -\frac{b}{2a}$

2- إذا كان $\Delta \neq 0$ فإن Δ يقبل جذرين مربعين $-u$ و u

يكون للمعادلة حلان: $z = \frac{-b+u}{2a}$ و $z = \frac{-b-u}{2a}$

ملاحظات:

(*) نعتبر المعادلة $az^2 + bz + c = 0$ مع $a \neq 0$
إذا كان z_1 و z_2 حلي المعادلة فإن:

$$\begin{cases} z_1 + z_2 = -\frac{b}{a} \\ z_1 z_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

(*) نعتبر المعادلة $az^2 + 2b'z + c = 0$ مع $a \neq 0$
من أجل حل المعادلة نستعمل المميز المختصر
 $\Delta' = b'^2 - ac$

1- إذا كان $\Delta' = 0$ المعادلة لها حل وحيد $z = -\frac{b'}{a}$

2- إذا كان $\Delta' \neq 0$ المعادلة لها حلان:

$z_1 = \frac{-b'+u}{2a}$ و $z_2 = \frac{-b'-u}{2a}$ حيث u جذر مربع Δ' .

5) الجذور المربعة لعدد من $\mathbb{C}^*$

(a) الطريقة المثلثية:

ليكن $Z = [r, \theta]$ من $\mathbb{C}^*$

لنحدد الجذرين المربعين ل Z .
 $Z = [r, \theta] = \left[\sqrt{r}, \frac{\theta}{2} \right]^2$

إن جذري Z هما: $u = \left[\sqrt{r}, \frac{\theta}{2} \right]$ و $-u$

(b) الطريقة الجبرية:

1) إذا كان $Z = a \in \mathbb{R}_+^*$

لدينا: $Z = a = (\sqrt{a})^2$

إن جذري Z هما $u = \sqrt{a}$ و $-u$

2) إذا كان $Z = -a (a \in \mathbb{R}_+^*)$

$$Z = -a = i^2 (\sqrt{a})^2 = (i\sqrt{a})^2$$

إن جذري Z هما $u = i\sqrt{a}$ و $-u$

3- إذا كان $Z = ib (b \in \mathbb{R}_+^*)$

$$Z = ib = 2i \cdot \frac{b}{2} = \left(\sqrt{\frac{b}{2}} \right)^2 (1+i)^2 = \left(\sqrt{\frac{b}{2}} (1+i) \right)^2$$

إن جذري Z هما $u = \sqrt{\frac{b}{2}} (1+i)$ و $-u$

4) إذا كان $Z = -ib (b \in \mathbb{R}_+^*)$

$$Z = -ib = -2i \cdot \frac{b}{2} = \left(\sqrt{\frac{b}{2}} \right)^2 (1-i)^2 = \left(\sqrt{\frac{b}{2}} (1-i) \right)^2$$

إن جذري Z هما $u = \sqrt{\frac{b}{2}} (1-i)$ و $-u$

5) إذا كان $Z = a + ib$ مع $(b \neq 0 \text{ و } a \neq 0)$

مثال:

لنحدد الجذرين المربعين للعدد:

$$Z = -3 + 4i$$

نضع $z = x + iy$ لدينا $z^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$

$$|z|^2 = x^2 + y^2 \text{ و } |Z| = 5$$

$$z^2 = Z \Leftrightarrow \begin{cases} z^2 = Z \\ |z|^2 = |Z| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 & (1) \\ 2xy = 4 & (2) \\ x^2 + y^2 = 5 & (3) \end{cases}$$

من (1) + (3) نستنتج أن $2x^2 = 2$ يعني $x = 1$ أو $x = -1$

ومن (1) - (3) نستنتج أن $2y^2 = 8$

$$y^2 = 4 \text{ يعني}$$

$$y = 2 \text{ أو } y = -2 \text{ أي}$$

ومن خلال (2) لدينا $xy = 2$ إذن x و y لهما نفس الإشارة

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \text{ أو } \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ إذن}$$

إن جذري Z هما $u = 1 + 2i$ و $-u$