

مسألة رقم (1)

I نعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$g(x) = 2x\sqrt{x} - 2 + \ln x$$

(1) أحسب $g'(x)$ ثم بيه أنه g تناهية على $]0, +\infty[$

(2) أحسب $g(1)$ ثم استنتج : $g(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 1$

II لتكن f دالة عددية معرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x$$

(1) أ- أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ أعط تأويلا هندسيا للنتيجة

ب- بيه أنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = 0$ ثم أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ج- بيه أنه المستقيم $y = -x + 1$: (Δ) مقارب مائل لـ (C_f)

د- أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) والمقارب المائل

(2) أ- بيه أنه $f'(x) = -\frac{g(x)}{2x\sqrt{x}} : \forall x \in \mathbb{R}^{+*}$

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f

(3) أسمى المنحنى (C_f)

III نعتبر المتتالية $(V_n)_n$ المعرفة كما يلي :

$$V_{n+1} = 1 + \frac{\ln V_n}{\sqrt{V_n}} ; V_0 = \frac{3}{2}$$

(1) بيه أنه $V_n \geq 1 : (\forall n \in \mathbb{N})$

(2) تحقق أنه $V_{n+1} = V_n + f(V_n)$ ثم أدرس رتبة المتتالية $(V_n)_n$

(3) استنتج أنه المتتالية $(V_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

IV لتكن φ الدالة المعرفة على $\mathbb{R}$ بما يلي :

$$\varphi(x) = xe^{\frac{x}{2}} - e^x + 1$$

(1) بيه أنه $\varphi(x) = f(e^x) : (\forall x \in \mathbb{R})$

(2) أدرس منحنى تغيرات الدالة φ

فبراير 2009

الجزء 1 :

نعتبر الدالة g المعرفة بما يلي : $g(x) = 2 \ln x + x - 1$

(1) أحسب المشتقة $g'(x)$

(2) بيه أنه g تناهية على $]0, +\infty[$ و ضع جدول تغيرات g

(حساب النهايات غير مطلوب)

(3) أحسب $g(1)$ ثم استنتج أنه $g(x) > 0 : (\forall x > 1)$

و أنه $g(x) < 0 : \forall x \in]0, 1[$

الجزء 2 : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = (\ln x)^2 - \ln x + x$$

(1) أ- بيه أنه $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

ب- بيه أنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ثم استنتج $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

(2) أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $+\infty$

(3) أ- بيه أنه $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$

ب- أنجز جدول تغيرات الدالة f

(4) أ- أدرس الوضع النسبي لـ (C_f) و المستقيم $y = x$ (Δ)

ب- أسمى المنحنى (C_f) و المستقيم $y = x$ (Δ)

الجزء 3 : لتكن $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$U_0 = 2 \text{ و } U_{n+1} = f(U_n) \text{ لكل } n \in \mathbb{N}$$

(1) بيه بالترجع أنه $1 \leq U_n \leq e : (\forall n \in \mathbb{N})$

(2) بيه أنه المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية

(3) استنتج أنه $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها

مسألة (2)

الجزء (1) : نعتبر الدالة $g(x) = x^2 + 2x + \ln(x+1)$

(1) بيه أنه $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = -\infty$

(2) أحسب $g'(x)$ و بيه أنه g تناهية على $]-1, +\infty[$

(3) أحسب $g(0)$ و استنتج أنه $g(x) > 0 : (\forall x > 0)$

و أنه $g(x) < 0 : \forall x \in]-1, 0[$

الجزء (2) : لتكن f الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1, +\infty[$

$$f(x) = x - \frac{\ln(x+1)}{x+1} \text{ بما يلي :}$$

(1) أ- أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$

ب- بيه أنه المستقيم $y = x$ (Δ) مقارب مائل لـ (C_f) عند $+\infty$

(2) بيه أنه $f'(x) = \frac{g(x)}{(x+1)^2}$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f

(3) أدرس الوضع النسبي للمنحنى (C_f) و المستقيم (Δ)

(4) أسمى المنحنى (C_f)

(5) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة كما يلي :

$$U_0 = 1 \text{ و } U_{n+1} = f(U_n) \text{ لكل } n \in \mathbb{N}$$

أ- بيه بالترجع أنه $U_n \geq 0 : (\forall n \in \mathbb{N})$

ب- بيه أنه المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية

ج- استنتج أنه $(U_n)_n$ متقاربة و حدد نهايتها