

العادية 2008

(I) لتكن g الدالة العددية المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$g(x) = x - 2 \ln x$$

1) أ. أحسب $g'(x)$ لكل x من $]0, +\infty[$

ب. بين أن g تناقصية على $[0, 2]$ وتزايدية على $[2, +\infty[$

2) استنتج أن $g(x) > 0$ لكل x من $]0, +\infty[$

(II) نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$f(x) = x - (\ln x)^2$$

1) أحسب $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ثم أول هندسيا النتيجة

$$2) \text{ أ. بين أن } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$$

ب. استنتج أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ وأن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

ج. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f عند $+\infty$

د. بين أن المنحنى C_f يوجد تحت المستقيم $y = x$ (Δ)

3) أ. بين أن $f'(x) = \frac{g(x)}{x}$ واستنتج تغيرات الدالة f

ب. أنجز جدول تغيرات الدالة f

ج. أعط معادلة المماس للمنحنى C_f في النقطة ذات الأضلاع 1

4) بين أن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال

$$]0, +\infty[\text{ وأن } \frac{1}{e} < \alpha < \frac{1}{2} \text{ , نأخذ } (\ln 2)^2 < \frac{1}{2}$$

5) أرسم المنحنى C_f والمستقيم (Δ) (نقبل أن C_f يقبل في

النقطة $I(e, e-1)$ نقطة انعطاف ونأخذ $e = 2,7$)

(III) $(U_n)_n$ المعرفة كما يلي :

$$U_0 = 2 \text{ و } U_{n+1} = f(U_n) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

1) بين بالترجع أن $1 \leq U_n \leq 2$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

2) بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تناقصية

3) استنتج أن $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها

العادية 2006

الجزء الأول : نعتبر الدالة g المعرفة على $]0, +\infty[$ بما يلي :

$$g(x) = \ln(x+1) - x$$

1) أ. أحسب $g'(x)$ ثم بين أن g تناقصية على $]0, +\infty[$

ب. استنتج أن $g(x) \leq 0$: $\forall x \in]0, +\infty[$

2) بين أن $0 < \ln(x+1) < x$: $\forall x \in]0, +\infty[$

الجزء الثاني : لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي :

$$f(x) = x + \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

1) حدد مجموعة التعريف وبين أن f دالة فردية

2) أ. أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

ب. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f عند $+\infty$

3) أحسب المشتقة $f'(x)$ ثم ضع جدول تغيرات الدالة f

$$4) \text{ أ. أدرس إشارة } \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$(\text{لاحظ أن } \frac{x+1}{x-1} = 1 + \frac{2}{x-1})$$

ب. استنتج الوضع النسبي للمنحنى C_f والمستقيم $y = x$ (Δ)

5) أرسم المنحنى C_f و (Δ) (نأخذ $f(\sqrt{3}) = 3$)

الجزء الثالث :

نعتبر المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$ المعرفة كما يلي : $U_n = f(n) - n$

$$1) \text{ أ. تحقق أن } U_n = \ln\left(1 + \frac{2}{n-1}\right) : \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

ب. بين أن $(U_n)_{n \geq 1}$ تناقصية

$$2) \text{ أ. بين أن } 0 < U_n \leq \frac{2}{n-1} : \forall n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$$

ب. أحسب نهاية المتتالية $(U_n)_{n \geq 1}$

مسألة

(I) 1) نضع $v(x) = \ln(x+1) - x$ لكل $x \in [0, +\infty[$

أ. أحسب $v'(x)$ وضع جدول تغيرات v

ب. استنتج أن $\ln(1+x) < x$ ($\forall x > 0$)

$$2) \text{ نضع } h(x) = -\frac{3}{2}x - \ln(1-x) \text{ لكل } x \in]-\infty, 0]$$

$$\text{ أ. بين أن } h'(x) = \frac{3x-1}{2(1-x)} \text{ وأنجز جدول تغيرات } h$$

ب. بين أن $h(x) \geq 0$ لكل $x \in]-\infty, 0]$

(II) لتكن f الدالة العددية المعرفة على $]-\infty, 1[$ بما يلي :

$$f(x) = -\frac{x}{2} - \ln(1-x)$$

$$1) \text{ أ. أحسب النهايتين } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \text{ و } \lim_{\substack{x \rightarrow 1^- \\ x < 1}} f(x)$$

ب. أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى (C_f) عند $-\infty$

$$2) \text{ أ. بين أن } f'(x) = \frac{x+1}{2(1-x)}$$

ب. ضع جدول تغيرات الدالة f

3) أ. بين أن (C_f) يوجد فوق $y = x$ (Δ) على $]-\infty, 0[$

ب. أرسم المنحنى (C_f)

(III) نعتبر المتتالية $(U_n)_n$ المتتالية العددية المعرفة كما

$$\text{ يلي : } U_0 = -1 \text{ و } U_{n+1} = f(U_n) \text{ لكل } n \text{ من } \mathbb{N}$$

أ. بين بالترجع أن $-1 \leq U_n \leq 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

ب. بين أن المتتالية $(U_n)_n$ تزايدية

$$\text{ ج. بين أن } U_{n+1} \geq \frac{1}{2}U_n \text{ استنتج أن } U_n \geq -\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

د. بين أن $(U_n)_n$ متقاربة وحدد نهايتها