الدوال اللوغاريتمية

ذ. محمد الكيال

الدالة اللوغاريتمية النبيرية

تعريف:

دالة اللوغاريتم النبيري هي الدالة الأصلية للدالة $x \mapsto \frac{1}{x}$ على المجال $]0;+\infty[$
والتي تنعدم في 1 و يرمز لها بالرمز: $\ln$

استنتاجات وخاصيات:

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln(xy) = \ln x + \ln y$ $\ln(x^r) = r\ln x \quad (r \in \mathbb{Q})$ $\ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln x$ $\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$	$\ln 1 = 0$	$\ln e = 1$
	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$ $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$ $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$	
	$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in \mathbb{R}$ $\ln x = y \Leftrightarrow x = e^y$	

إذا كان n عددا زوجيا فإن: $\forall x \in \mathbb{R}^* \quad \ln(x^n) = n\ln|x|$

مجموعة التعريف:

الدالة f معرفة كما يلي :	مجموعة تعريف الدالة f هي :
$f(x) = \ln[u(x)]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ و $u(x) > 0\}$
$f(x) = \ln\left[(u(x))^2\right]$	$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x \in D_u$ و $u(x) \neq 0\}$
$f(x) = \ln\|u(x)\|$	

نهايات أساسية:

$\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$	$(n \in \mathbb{N}^*)$
$\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} (\ln x) = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to0 \\ >}} (x^n \ln x) = 0$	
$\lim\limits_{x\to1} \frac{\ln x}{x-1} = 1$	$\lim\limits_{x\to0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$	

الاتصال:

الدالة $x \mapsto \ln x$ متصلة على المجال $]0;+\infty[$

لتكن u دالة معرفة على مجال I
إذا كانت u موجبة قطعا و متصلة على مجال I فإن الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ متصلة على المجال I

◈ **الاشتقاق:**

الدالة $x \mapsto \ln x$ قابلة للاشتقاق على $]0;+\infty[$

ولدينا:

$$\forall x \in]0;+\infty[\quad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$

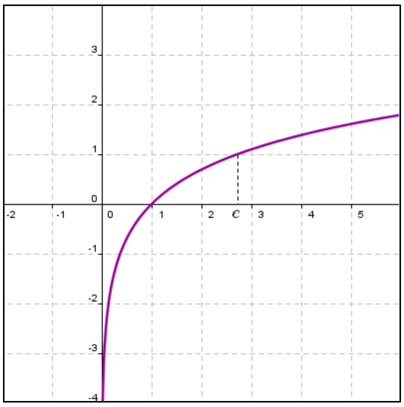
لتكن u دالة معرفة على مجال I

إذا كانت u دالة موجبة قطعا و قابلة للاشتقاق على مجال I

فإن : الدالة $x \mapsto \ln[u(x)]$ قابلة للاشتقاق على المجال I

ولدينا : $(\ln[u(x)])' = \dfrac{u'(x)}{u(x)} \qquad \forall x \in I$

◈ **التمثيل المبياني:**



◈ **إشارة $\ln$:**

x	0	1	$+\infty$
$\ln x$	‖ -	0	+

↩ الدالة اللوغاريتم للأساس a حيث: $a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}$

◈ **تعريف:**

الدالة اللوغاريتم للأساس a هي الدالة التي يرمز لها بالرمز : ℓog_a

حيث : $\ell og_a(x) = \dfrac{\ln x}{\ln a} \qquad \forall x \in]0;+\infty[$

◈ **استنتاجات وخاصيات:**

$\ell og_a 1 = 0$

$\ell og_a a = 1$

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[\qquad \forall r \in \mathbb{Q}$

$\ell og_a\, x = \ell og_a\, y \Leftrightarrow x = y$

$\ell og_a\, x = r \Leftrightarrow x = a^r$

$\forall x \in]0;+\infty[\quad \forall y \in]0;+\infty[$

$\ell og_a(xy) = \ell og_a x + \ell og_a y$

$\ell og_a(x^r) = r\ell og_a x \qquad (r \in \mathbb{Q})$

$\ell og_a\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ell og_a x$

$\ell og_a\left(\dfrac{x}{y}\right) = \ell og_a x - \ell og_a y$

◈ **نهايات و متفاوتات:**

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\ell og_a x > \ell og_a y \Leftrightarrow x > y$	$\ell og_a x < \ell og_a y \Leftrightarrow x < y$
$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a x = -\infty$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \ell og_a x = -\infty$ $\lim\limits_{x \to 0^+} \ell og_a x = +\infty$

◈ **المشتقة:**

$$\forall x \in]0,+\infty[\qquad (\ell og_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$$