

## دالة اللوغاريتم

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

### I- دالة اللوغاريتم النسبي

1- **تذكير** - نعلم أن كل دالة متصلة على مجال  $I$  تقبل دوالاً أصلية على  $I$

- نعلم أن لكل  $r$  من  $\{-1\} \cup \mathbb{Q}$  الدالة  $x^r \rightarrow x^r$  تقبل دوالاً أصلية على  $[0; +\infty]$  هي

حيث  $k$  عدد حقيقي ثابت

- في الحالة التي تكون  $r = -1$  نحصل على الدالة  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  المتصلة على  $[0; +\infty]$  ومنه تقبل دوالاً أصلية

وبالتالي الدالة  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  تقبل دالةً أصليةً وحيدةً تندم في 1.

### 2- تعريف

الدالة الأصلية لدالة  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  على  $[0; +\infty]$  التي تندم في النقطة 1 تسمى دالة اللوغاريتم النسبي ويرمز لها بالرمز  $\ln$  أو  $\text{Log}$

$$\begin{cases} x > 0 \\ f'(x) = \frac{1}{x} \Leftrightarrow f(x) = \ln(x) \\ f(1) = 0 \end{cases}$$

### 3- خصائص

#### A- خصائص

$\ln(1) = 0$  \*- مجموعة تعريف الدالة  $\ln$  هي  $[0; +\infty]$   
\* الدالة  $\ln$  متصلة على  $[0; +\infty]$

$\forall x \in [0; +\infty[ \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}$  و \*- الدالة  $\ln$  قابلة للاشتغال على  $[0; +\infty]$   
\* الدالة  $\ln$  تزايدية قطعاً على  $[0; +\infty[$

#### نتائج

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعاً  $x$  و  $y$   
 $\ln x = \ln y \Leftrightarrow x = y$   
 $\ln x > \ln y \Leftrightarrow x > y$

#### ملاحظة

$$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = 1$$

$$\ln x > 0 \Leftrightarrow x > 1$$

$$\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$$

1- حدد مجموعة تعريف الدالتيين **تمرين**

$$\ln(x^2 - 3x) \quad \ln(x - 1) + \ln(4 - x)$$

$$\ln(x^2 - 3) = \ln(2x)$$

$$\ln(x^2 + 2x) = 0$$

$$\ln(x^2 - 2x) \leq \ln(x)$$

$$\ln(x^2 - x - 2) < 0$$

2-

3-

#### B- خاصية أساسية

**نشاط** ليكن  $a$  و  $b$  عددين حقيقيين موجبين قطعاً و  $F$  دالة عدديّة معرفة على  $[0; +\infty[$  بـ

$F(x) = \ln(ax)$  و استنتاج أن  $F$  دالةً أصليةً لدالة  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  على  $[0; +\infty[$  **-1** بين أن

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$  **-2** بين أن

$\forall x \in [0; +\infty[ \quad F(x) = \ln(ax) = \ln a + \ln x$

1- لدينا  $u(x) = ax$  حيث  $F(x) = \ln \circ u(x)$

$$\forall x \in ]0; +\infty[ \quad F'(x) = u'(x) \times (\ln)'(u(x)) = a \cdot \frac{1}{ax} = \frac{1}{x}$$

و منه  $F$  دالة أصلية لدالة  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  على  $]0; +\infty[$

2- لدينا  $F$  و  $x \rightarrow \ln x$  دالتان أصليتان لدالة  $x \rightarrow \frac{1}{x}$  على  $]0; +\infty[$

$$\forall x \in ]0; +\infty[ \quad F(x) = k + \ln x$$

$$k = \ln a \quad \text{و منه} \quad F(1) = k \quad \text{و} \quad F(1) = \ln(a)$$

$$\forall x \in ]0; +\infty[ \quad F(x) = \ln(ax) = \ln a + \ln x$$

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad \text{نحصل على} \quad x = b \quad \text{بوضع}$$

## خاصية أساسية

$$\forall (a; b) \in (]0; +\infty[)^2 \quad \ln(ab) = \ln a + \ln b$$

## ج- خصائص

$$\forall x \in ]0; +\infty[ \quad \ln \frac{1}{x} = -\ln x$$

$$\forall (x; y) \in ]0; +\infty[^2 \quad \ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$$

$$\forall (x_1; x_2; \dots; x_n) \in ]0; +\infty[^n \quad \ln(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n) = \ln x_1 + \ln x_2 + \dots + \ln x_n$$

$$\forall x \in ]0; +\infty[ \quad \forall r \in \mathbb{Q}^* \quad \ln x^r = r \ln x$$

## البرهان

$$\ln \left( x \times \frac{1}{x} \right) = \ln 1 \Leftrightarrow \ln x + \ln \frac{1}{x} = 0 \Leftrightarrow \ln \frac{1}{x} = -\ln x \quad \diamond$$

$$\ln x^r = \ln \underbrace{(x \times x \times \dots \times x)}_{r \text{ facteurs}} = \underbrace{\ln x + \ln x + \dots + \ln x}_{r \text{ termes}} = r \ln x \quad \text{إذا كان } r \in \mathbb{N}^* \quad \diamond$$

$$\ln x^r = \ln x^{-n} = \ln \frac{1}{x^n} = -\ln x^n = -n \ln x = r \ln x \quad \text{و منه} \quad r = -n \quad \text{إذا كان } r \in \mathbb{Z}_-^* \quad \diamond$$

$$y = x^{\frac{p}{q}} \Leftrightarrow x^p = y^q \quad \text{نعلم أن} \quad q \in \mathbb{N}^* \quad p \in \mathbb{Z}^* \quad / \quad \frac{p}{q} = r \quad \text{إذا كان} \quad \diamond$$

$$\ln x^{\frac{p}{q}} = \frac{p}{q} \ln x \quad \text{اذن} \quad \ln y = \frac{p}{q} \ln x \quad \text{أي} \quad p \ln x = q \ln y \quad \text{و بالتالي} \quad \ln x^p = \ln y^q \quad \text{و منه}$$

$$\ln x^r = r \ln x \quad \text{أي}$$

$$\forall x \in ]0; +\infty[ \quad \ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x \quad \text{حالة خاصة}$$

تمرين هل الدالتان  $f$  و  $g$  متساويتين في الحالتين التاليتين

$$f(x) = \ln(x-1)^2 \quad g(x) = 2 \ln|x-1| \quad (a)$$

$$f(x) = \ln x(x-1) \quad g(x) = \ln x + \ln(x-1) \quad (b)$$

$$\ln \sqrt{\sqrt{2}+1} + \ln \sqrt{\sqrt{2}-1} \quad \text{تمرين 1) أحسب}$$

$$\ln 2 \approx 0,7 \quad \ln 3 \approx 1,1 \quad \text{ادا علمت أن} \quad \ln \frac{2}{9} \quad \text{تمرين 2) أحسب قيمة مقرية ل}$$

(a) دالة  $\ln$  تزايدية قطعا على  $[0; +\infty]$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty \quad \text{مبرهنة 1 (ن قبل)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty \quad \text{مبرهنة 2 (ن برهان)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \frac{1}{t} = \lim_{t \rightarrow +\infty} -\ln t = -\infty \quad x = \frac{1}{t} \quad \text{نضع}$$

البرهان

(c) العدد

لدينا الدالة  $\ln$  تزايدية قطعا على  $[0; +\infty]$  ومتصلة و  $\ln(0; +\infty) = \mathbb{R}$  ومنه المعادلة  $\ln x = 1$  تقبل حلها وحيدا في  $[0; +\infty]$  ويرمز له بالحرف  $e$  ادن  $\ln e = 1$   $e \approx 2,71828$  نقبل أن  $e$  ليس عددا جذريا وقيمة المقربة هي

(d) جدول تغيرات الدالة  $\ln$

$x$	0	1	$e$	$+\infty$
$f$				$+\infty$

Graph of  $\ln x$  showing the curve passing through  $(0, -\infty)$ ,  $(1, 0)$ , and  $(e, 1)$ , approaching  $+\infty$  as  $x \rightarrow +\infty$ .

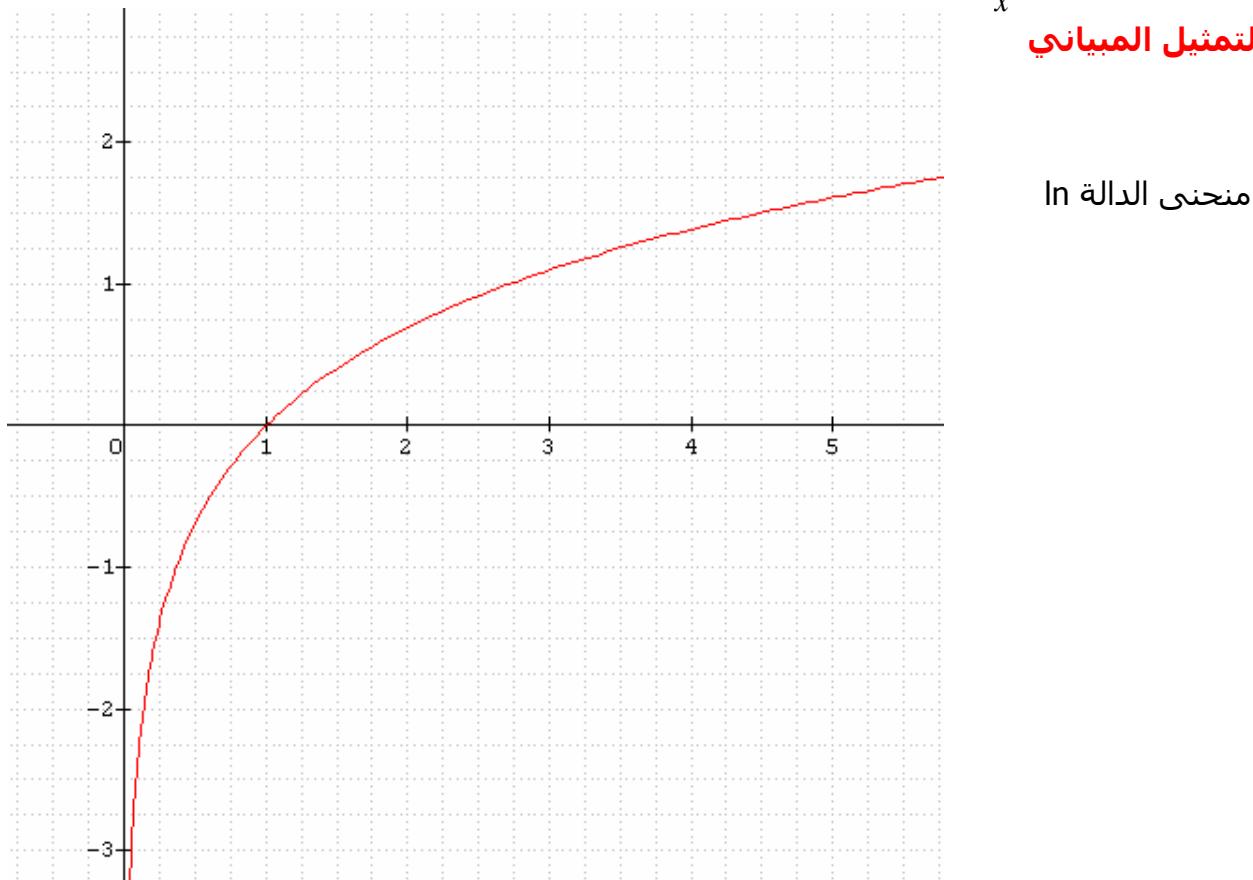
(e) الفروع الانهائية  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$  فان محور الارaticip مقارب للمنحنى الممثل الدالة  $\ln$  بما أن

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \text{مبرهنة}$$

اذن المنحنى الممثل الدالة  $\ln$  يقبل فرعا شلجميا في اتجاه محور الأفاسيل

(f) دراسة التغير  $\ln''(x) = -\frac{1}{x^2}$  اذن منحنى الدالة  $\ln$  مقعر  $\forall x \in [0; +\infty]$

(g) التمثيل المباني



$$n \in \mathbb{N}^* \text{ حيث } \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln x = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x-1} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x \ln(x^2 - x) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x-2}{x}\right) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x - \ln x \quad \text{حدد} \quad \text{تمرين}$$

## 5 - مشتقة الدالة اللوغاريتمية

### أ- مبرهنة

u دالة قابلة للاشتاقاق على مجال I ولا تنعدم على هذا المجال I

$$\forall x \in I \quad (\ln|u(x)|)' = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

البرهان u لا تنعدم على I ومنه u إما موجبة قطعا على I أو سالبة قطعا على I

إذا كانت u موجبة قطعا على I فإن  $f(x) = \ln u(x)$  ومنه  $f'(x) = u'(x) \ln' u(x) = \frac{u'(x)}{u(x)}$

إذا كانت u سالبة قطعا على I فإن (b) ومنه  $f(x) = \ln(-u(x))$

$$\forall x \in I \quad f'(x) = -u'(x) \ln'(-u(x)) = \frac{-u'(x)}{-u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

تمرين حدد مجموعة تعريف الدالة f وأحسب مشتقتها في الحالتين التاليتين

$$f(x) = \ln(x^2 + 2x) \quad (b) \quad f(x) = \ln|x^2 - 4| \quad (a)$$

### ب- تعريف

u دالة قابلة للاشتاقاق على مجال I ولا تنعدم على المجال I

الدالة  $\frac{u'(x)}{u(x)}$  تسمى المشتقة اللوغاريتمية للدالة u على المجال I

### ج- نسخة

u دالة قابلة للاشتاقاق على مجال I ولا تنعدم على المجال I

الدوال الأصلية لدالة  $\frac{u'(x)}{u(x)}$  على I هي الدوال  $\ln|u(x)| + c$  حيث c عدد ثابت

تمرين 1 أوجد دالة أصلية لدالة f على المجال I في الحالات التالية

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-1}{x+1} & f(x) = \tan(x) \\ I = [-1; +\infty[ & I = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ & f(x) = \frac{x-1}{x^2 - 2x} \\ & I = [2; +\infty[ \end{cases}$$

تمرين 2 أحسب الدالة المشتقة لدالة f على  $[-1; +\infty[$  حيث  $f(x) = \frac{\sqrt{x^3 + 1}}{(x+2)^2}$

## II- دالة اللوغاريتم للأساس a

### 1- تعريف

عدد حقيقي موجب قطعا و مخالف للعدد 1

الدالة  $\log_a x$  المعرفة على  $[0; +\infty[$  تسمى دالة اللوغاريتم للأساس a ونرمز لها بالرمز  $\log_a$

$$\forall x \in [0; +\infty[ \quad \log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a}$$

### ملاحظات

\*- دالة اللوغاريتم النابيري هي دالة اللوغاريتم للأساس e

$$\forall a \in \mathbb{R}^{+*} - \{1\} \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \log_a(a) = 1 \quad \log_a(a^r) = r \quad -*$$

بما أن لكل  $x$  من  $[0; +\infty[$  حيث  $\log_a(x) = k \ln x$  عدد حقيقي ثابت فإن الدالة  $\ln$  تحقق جميع الخصائص التي تتحققها الدالة  $\log_a$

$$\forall (x, y) \in [0; +\infty[^2 \quad \forall r \in \mathbb{Q} \quad \log_a(xy) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y) \quad ; \quad \log_a(x^r) = r \log_a(x)$$

## 3- دراسة دالة اللوغاريتم للأساس a

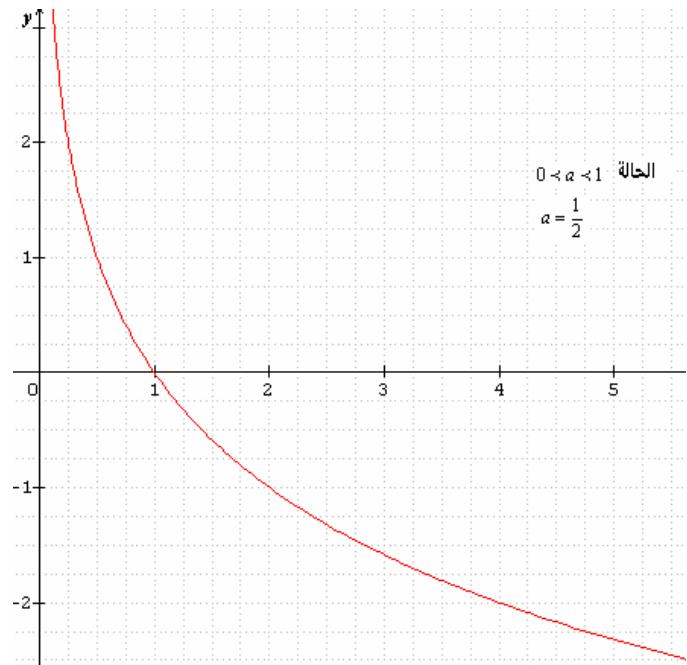
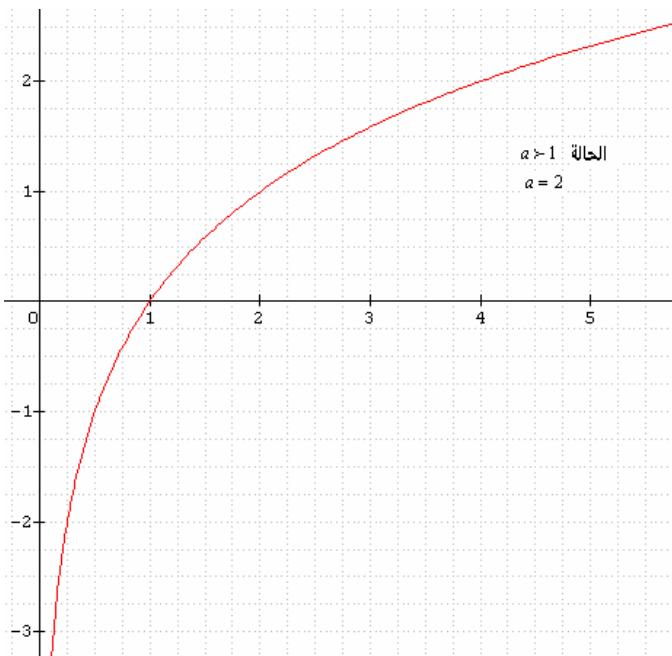
$$\forall x \in [0; +\infty[ \quad \log_a'(x) = \frac{1}{x \ln a}$$

- اذا كان  $1 < a < 0$  فإن  $\ln a < 0$  و منه  $\log_a' < 0$  تناقصية قطعا على  $[0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = -\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = +\infty$$

- اذا كان  $a > 1$  فإن  $\ln a > 0$  و منه  $\log_a' > 0$  تزايدية قطعا على  $[0; +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \log_a x = +\infty \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} \log_a x = -\infty$$



## 4- حالة خاصة اللوغاريتم العشري

### تعريف

الدالة اللوغاريتمية التي أساسها 10 تسمى دالة اللوغاريتم العشري و يرمز لها بـ  $\log$

$$\forall x \in [0; +\infty[ \quad \log x = \log_{10} x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

### ملاحظات

- اذا وضعنا  $M = \frac{1}{\ln 10}$  فاننا نحصل على  $\log x = M \ln x$

$$\forall m \in \mathbb{Z} \quad \log 10^m = m$$

تمرين 1- أحسب  $\log 0,01$   $\log 10000$

تمرين 2- حل في  $\mathbb{R}$   $\log(x-1) + \log(x+3) = 2$

$$\begin{cases} x+y=65 \\ \log x + \log y = 3 \end{cases}$$

تمرين 3- حل في  $\mathbb{R}^2$