



I. تقديم الدالة $f(x) = \ln(x)$ (اللوغاريتم النبيري):

01. تقديم الدالة اللوغاريتم النبيري :

❖ نشاط :

لنعتبر الدالة العددية المعرفة ب : $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{1}{x}$$

(1) هل f تقبل دالة أصلية على المجال $]0, +\infty[$ ؟ علل جوابك

(2) كم توجد من دالة أصلية F ل f حيث $F(1) = 0$ ؟

❖ مفردات:

الدالة الأصلية F للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ على $]0, +\infty[$ حيث $F(1) = 0$

▪ نرسم لها ب $F(x) = \ln(x)$

▪ الدالة F تسمى الدالة اللوغاريتمية النبيري

❖ تعريف :

الدالة الأصلية F للدالة $f(x) = \frac{1}{x}$ على المجال $]0, +\infty[$ والتي تنعدم في 1 (أي $F(1) = 0$) تسمى الدالة اللوغاريتم النبيري و يرمز

لها ب $F(x) = \ln(x)$

❖ ملحوظة:

بدلا من كتابة: $F(x) = \ln(x)$ نكتب: $f(x) = \ln(x)$

❖ نتائج:

▪ الدالة $f(x) = \ln(x)$ مجموعة تعريفها هي $D_f =]0, +\infty[$

▪ $f(1) = \ln(1) = 0$

▪ الدالة $f(x) = \ln(x)$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$ و دالتها المشتقة هي $f'(x) = [\ln(x)]' = \frac{1}{x} > 0$

▪ إذن الدالة $f(x) = \ln(x)$ تزايدية قطعاً على $]0, +\infty[$

▪ $\forall a, b \in]0, +\infty[, a < b \Leftrightarrow \ln(a) < \ln(b)$

▪ $\forall a, b \in]0, +\infty[, a = b \Leftrightarrow \ln(a) = \ln(b)$

01. إشارة $\ln(x)$ هي كما يلي:



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم ح. أ + ع. فيزياء

2

الصفحة

درس : الدوال اللوغاريتمية

| | | | |
|----------|---|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| $\ln(x)$ | | - | 0 + |

إشارة $\ln(x)$: نعلم أن: $\ln(1) = 0$

لدينا : $x > 1 \Rightarrow \ln(x) > 0$ (1)

$0 < x < 1 \Rightarrow \ln(x) < 0$ (2)

تطبيق:

(1) مجموعة تعريف الدالة $f(x) = \frac{2}{\ln(x)}$

(2) مجموعة تعريف الدالة $f(x) = \sqrt{\ln(x)}$

(3) حل المعادلة: $\ln(2x) - \ln(x-1) = 0$

(4) حل المتراجحة: $\ln(2x) - \ln(x-1) \leq 0$

02. الخاصيات الجبرية:

خاصيات:

- لكل a, b من $]0, +\infty[$
- $\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b)$ (هذه الخاصية تقبل)
 - $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$
 - $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$
 - $\ln(a^r) = r \times \ln(a)$ مع $r \in \mathbb{Q}$
 - $\ln(\sqrt[3]{a}) = \frac{1}{3} \times \ln(a)$ و $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \times \ln(a)$

❖ نبرهن على: $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$.

نأخذ : $b > 0$ لدينا:

$$\ln(1) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{b}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(b \times \frac{1}{b}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln(b) + \ln\left(\frac{1}{b}\right) = 0 \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b) \text{ : خلاصة}$$

❖ تطبيق:

▪ نضع: $\ln(2) = 0,69$. أحسب: $\ln(4)$ و $\ln(8)$

▪ بسط: $\ln(\sqrt{3}) + \ln(9)$



▪ بسط: $\ln\left[(\sqrt{5})^{2012}\right] - \ln(\sqrt{5})$

❖ ملحوظة:

الكتابة: $\ln(x) \times \ln(x) = \ln^2(x)$

الكتابة: $\ln(x) \times \ln(x) \times \ln(x) = \ln^3(x)$

بصفة عامة: $n \in \mathbb{N}^* \quad \underbrace{\ln(x) \times \ln(x) \times \dots \times \ln(x)}_{n \text{ fois}} = \ln^n(x)$

❖ تطبيق: بسط: $\ln^2(3 - \sqrt{2}) - \ln^2(3 + \sqrt{2})$

0.3. نهايات اعتيادية :

❖ خاصيات:

الدالة: $f(x) = \ln(x)$ معرفة على $D_f =]0, +\infty[$ إذن:

(ومنه الدالة f تقبل مقارب عمودي معادلته: $x = 0$ (اي محور الأرتيب))

▪ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$

(ومنه يجب دراسة الفرع اللانهائي بجوار $+\infty$)

▪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$

▪ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ومنه $a = 0$ (إذن الدالة f تقبل فرع شلجمي في اتجاه محور الأفاصيل)

❖ تطبيق: أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+2)}{x}$

0.4. نهايات ضرورية معرفتها :

❖ خاصيات:

▪ $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \times \ln(x) = 0^-$

▪ $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

▪ $n \in \mathbb{N}^* ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x^n} = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \times \ln(x) = 0^-$

| | | | |
|----|-----------|---|-----------|
| x | 0 | 1 | $+\infty$ |
| f' | | + | |
| f | $-\infty$ | 0 | $+\infty$ |

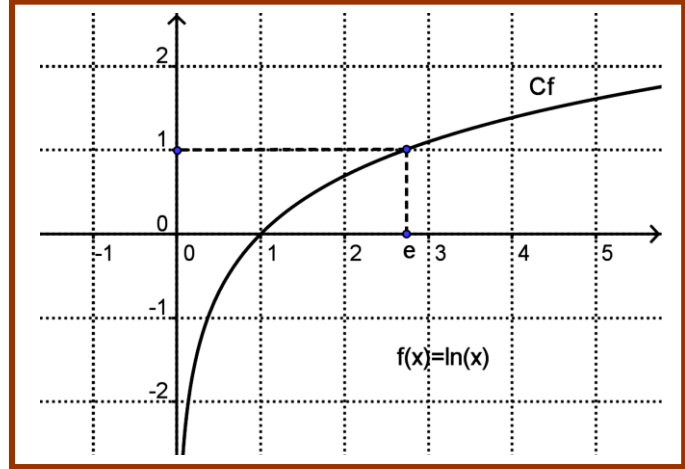
❖ تطبيق: أحسب: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x^3}$ و $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x \times \ln(x)}$

0.5. دراسة الدالة $f(x) = \ln(x)$

• حسب ما سبق نستنتج: جدول تغيرات f



- إنشاء منحنى الدالة: f في م. م. م $(0, \vec{i}, \vec{j})$



نتائج: ❖

- الدالة $f(x) = \ln(x)$ متصلة و تزايدية قطعا على $]0, +\infty[$
- f تقابل من $]0, +\infty[$ إلى $]-\infty, +\infty[$
- المعادلة $f(x) = 1$ (أي $\ln(x) = 1$) تقبل حلا وحيدا على $]0, +\infty[$ ونرمز لهذا الحل ب: e مع $(e \approx 2,718)$
- $\forall r \in \mathbb{Q} : r = \ln(e^r)$

مثال: $3 = \ln(e^3)$ و $-\frac{2}{7} = \ln\left(e^{-\frac{2}{7}}\right)$

❖ تطبيق: حدد مجموعة تعريف الدالة: $f(x) = \frac{1}{3 - \ln(x)}$

06. المشتقة اللوغاريتمية لدالة:

❖ تعريف و خاصية:

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I $\forall x \in I : u(x) \neq 0$

- الدالة $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$ تسمى **المشتقة اللوغاريتمية** للدالة u على المجال I .
- الدالة: $f(x) = \ln|u(x)|$ قابلة للاشتقاق على المجال I و دالتها المشتقة هي: $f'(x) = \left[\ln|u(x)| \right]' = \frac{u'(x)}{u(x)}$ (أي المشتقة اللوغاريتمية ل u على I).

❖ برهان:

- لدينا : u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I إذن u متصلة على I
- بمأن : $\forall x \in I : u(x) \neq 0$ إذن $u(x) < 0$ و إما $u(x) > 0$.
- حالة : $u(x) > 0$ ومنه : $f(x) = \ln|u(x)| = \ln(u(x))$



بمأن $u(x) > 0$ إذن $u(I) \subset]0, +\infty[$ ومنه الدالة $x \rightarrow \ln(x)$ قابلة للاشتقاق على $u(I)$

$$I \xrightarrow{u} u(I) \xrightarrow{\ln} \mathbb{R}$$

$$x \longrightarrow u(x) \longrightarrow \ln(u(x)) = \ln \circ u(x)$$

إذن: f قابلة للاشتقاق لأنها مركبة دالتين قابلتين للاشتقاق ومنه:

$$f'(x) = [\ln|u(x)|]' = [\ln(u(x))]'$$

$$= [\ln \circ u(x)]' = u'(x) \times \ln' \circ u(x)$$

$$= u'(x) \times \frac{1}{u(x)} = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

• حالة: $u(x) < 0$ ومنه: (بنفس الطريقة نبرهن على ذلك)

❖ مثال:

$$f(x) = [\ln|x^2 - x|] \text{ مع } f' :$$

$$f'(x) = [\ln|x^2 - x|]' = \frac{(x^2 - x)'}{x^2 - x} = \frac{2x - 1}{x^2 - x}$$

❖ مثال:

$$u(x) = 3x^2 - 5x$$

لنعتبر الدالة: $u(x) = 3x^2 - 5x$ أوجد الدالة المشتقة اللوغاريتمية ل u .

$$x \rightarrow \frac{6x - 5}{3x^2 - 5x}$$

❖ استنتاج

لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I حيث $\forall x \in I: u(x) \neq 0$

الدوال الأصلية للدالة: $x \rightarrow \frac{u'(x)}{u(x)}$ هي الدوال التي على شكل $F(x) = \ln|u(x)| + c$ مع $(c \in \mathbb{R})$.

❖ مثال:

$$\blacksquare \text{ أوجد الدوال الأصلية للدالة: } f(x) = \frac{5}{x-2} \text{ على }]2, +\infty[$$

II. دالة اللوغاريتم للأساس a مع: $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$

❖ تعريف:

ليكن a من $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ (a عدد موجب قطعاً و $a \neq 1$)

الدالة المعرفة كما يلي:

$$f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \rightarrow f(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

تسمى الدالة اللوغاريتم للأساس a و نرمز لها ب \log_a .



❖ ملحوظة:

- في حالة : $a = 10$ الدالة : $f(x) = \log_{10}(x)$ تسمى الدالة اللوغاريتم العشري ويرمز لها باختصار: $f(x) = \text{Log}(x)$
- إذن: $\log_{10} = \text{Log}$ ومنه : $\text{Log}(10) = 1$; $\text{Log}(1) = 0$; $\text{Log}(10^r) = r$

❖ نتائج:

$$\log_a(1) = \frac{\ln(1)}{\ln(a)} = 0 \quad \text{و} \quad \log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}$$

$$\log_a(a) = \frac{\ln(a)}{\ln(a)} = 1$$

$$\log_a(e) = \frac{\ln(e)}{\ln(a)} = \frac{1}{\ln(a)}$$

❖ ملحوظة:

$$\log_e = \ln \quad \text{إذن} \quad \log_e(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(e)} = \ln(x)$$

❖ خاصيات:

لكل x, y من $]0, +\infty[$ و $a \in]0, 1[\cup]1, +\infty[$

$$\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{1}{y}\right) = -\log_a(y)$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a(x) - \log_a(y)$$

$$\log_a(x^r) = r \times \log_a(x) \quad \text{مع} \quad r \in \mathbb{Q}$$

$$\log_a(\sqrt[3]{x}) = \frac{1}{3} \times \log_a(x) \quad \text{و} \quad \log_a(\sqrt{x}) = \frac{1}{2} \times \log_a(x)$$

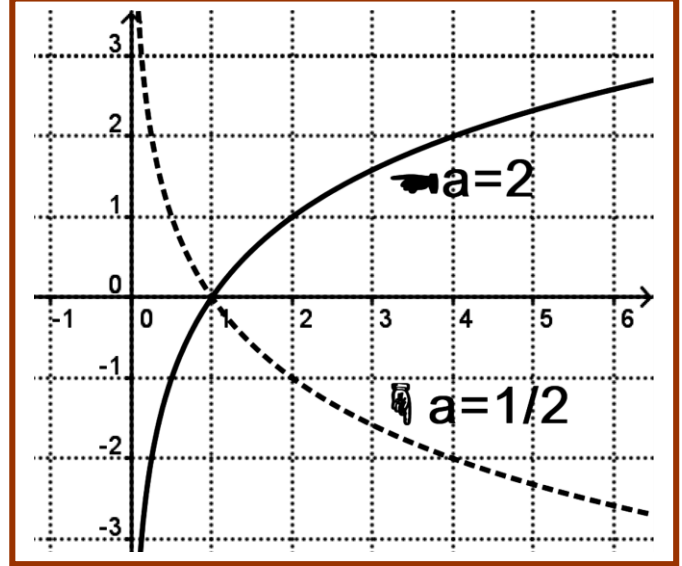
❖ نبرهن على: $\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y)$

$$\log_a(x \times y) = \frac{\ln(x \times y)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x) + \ln(y)}{\ln(a)} = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} + \frac{\ln(y)}{\ln(a)} = \log_a(x) + \log_a(y)$$

$$\log_a(x \times y) = \log_a(x) + \log_a(y) \quad \text{إذن:}$$



■ التمثيل المبياني ل $f(x) = \log_a(x)$ نأخذ: $a = \frac{1}{2}$ =



❖ أمثلة:

بسط التعابير التالية:

(1) $\log_2(8) - \log_2(\sqrt[3]{32}) + \log_2(9) - \log_2(3)$

(2) $\log_3\left(\frac{15}{4}\right) + \log_2\left(\frac{1}{27}\right) + \log_3\left(\frac{4}{5}\right)$

(3) $\log(100) - \log(10^{2013}) + \log\left(\frac{1}{10^{100}}\right)$

(4) بين أن: $\forall a, b \in]1, +\infty[\log_b(a) = \frac{1}{\log_a(b)}$

(5) حل في \mathbb{R} المعادلة: $\log_3(2x) \times (\log_5(x) - 1) = 0$

(6) حل في \mathbb{R} المتراجحة: $\log_{\sqrt{3}}(3x-1) \geq \log_{\sqrt{3}}(x+1)$

(7) أدرس الدالة: $f(x) = \log_5(x+1)$