



01.

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة كما يلي:

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{2}{1+u_n} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

01. نبين أن: $0 \leq u_n \leq 3$: $\forall n \geq 0$.

نستدل على ذلك بالترجع :

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$.
- لدينا : $u_0 = 3$ ومنه : $0 \leq u_0 \leq 3$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$.
- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $0 \leq u_n \leq 3$ صحيحة (معطيات الترجع)
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n + 1$. أي نبين أن : $0 \leq u_{n+1} \leq 3$.

لدينا : حسب معطيات الترجع $0 \leq u_n \leq 3 \Rightarrow 0 + 1 \leq u_n + 1 \leq 3 + 1$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{1}{u_n + 1} \leq \frac{1}{1}$$

$$\Rightarrow 2 \times \frac{1}{4} \leq 2 \times \frac{1}{u_n + 1} \leq 2 \times 1 ; (2 > 0)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \leq \frac{2}{u_n + 1} \leq 2$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{2} \leq u_{n+1} \leq 2 \leq 3$$

$$\Rightarrow 0 \leq u_{n+1} \leq 3$$

إذن العلاقة صحيحة ل $n + 1$.

خلاصة : $\forall n \geq 0 : 0 \leq u_n \leq 3$

02. نعتبر المتتالية العددية $(v_n)_{n \geq 0}$ المعرفة كما يلي: $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$.

أ- نبين أن المتتالية (v_n) هندسية وحدد عناصرها المميزة.

لدينا :

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{\frac{2}{u_n + 1} - 1}{\frac{2}{u_n + 1} + 2}$$

$$= \frac{2 - u_n - 1}{2 + 2u_n + 2}$$

$$= \frac{1 - u_n}{2 + 2u_n + 2}$$



$$= \frac{1}{2} \times \frac{-u_n + 1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-1}{2} \times \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$$

$$= \frac{-1}{2} \times v_n$$

$$v_{n+1} = \frac{-1}{2} \times v_n \text{ ومنه :}$$

خلاصة : المتتالية (v_n) هندسية أساسها : $q = -\frac{1}{2}$ وحدها الأول هو $u_0 = 3$.

ب- نكتب v_n بدلالة n ثم استنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

• المتتالية (v_n) هندسية أساسها : $q = -\frac{1}{2}$ وحدها الأول $v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 2} = \frac{3-1}{3+2} = \frac{2}{5}$ إذن حددها العام هو

$$v_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-n_0} \times v_{n_0} \quad (n_0 = 0)$$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right)^{n-0} \times \frac{2}{5} \quad \left(v_{n_0} = v_0 = \frac{2}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{-1}{2}\right)^n \times \frac{2}{5}$$

خلاصة : كتابة v_n بدلالة n $v_n = \left(\frac{-1}{2}\right)^n \times \frac{2}{5}$

• ثم نستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

لدينا : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n = 0$ $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{2}\right)^n \times \frac{2}{5} = 0$ (لأن $-1 < q < 1$ حسب خاصية)

خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 0$

.02

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة كما يلي: $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{2 + (u_n)^2} ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

(1) نبين أن: $\forall n \geq 0 : u_n > 0$

نستدل على ذلك بالترجع :

• نتحقق أن العلاقة صحيحة لـ $n = 0$.

لدينا : $u_0 > 0$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة لـ $n = 0$.

• نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $u_n > 0$ صحيحة (معطيات التراجع)



• نبين أن العلاقة صحيحة ل $n+1$. أي نبين أن : $u_{n+1} > 0$.

لدينا : حسب معطيات الترجع $u_n > 0$ و $2 + (u_n)^2$ $\Rightarrow u_n > 0$.

$$\Rightarrow \frac{u_n}{2 + (u_n)^2} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

إذن العلاقة صحيحة ل $n+1$.

خلاصة : $\forall n \geq 0 : u_n > 0$

(2) نبين أن: u_n تناقصية ثم استنتج أنها متقاربة.

• نبين أن: u_n تناقصية :

لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{2 + (u_n)^2} - u_n \\ &= \frac{u_n - u_n(2 + (u_n)^2)}{2 + (u_n)^2} \\ &= \frac{u_n(1 - 2 - (u_n)^2)}{2 + (u_n)^2} \\ &= \frac{-u_n(1 + (u_n)^2)}{2 + (u_n)^2} < 0 \quad ; \quad (u_n > 0) \end{aligned}$$

ومنه : $u_{n+1} - u_n < 0$ أي $u_{n+1} < u_n$.

خلاصة : u_n تناقصية

• نستنتج أنها متقاربة.

لدينا :

- $\forall n \geq 0 : u_n > 0$ أي مصغرة ب 0 .

- u_n تناقصية .

ومنه : u_n متقاربة (حسب خاصية) .

خلاصة : u_n متقاربة .

(3)

أ- نبين أن: $\forall n \geq 0 : u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$.

لدينا :

$$u_n > 0 \Rightarrow (u_n)^2 > 0$$

$$\Rightarrow 2 + (u_n)^2 > 2$$



$$\Rightarrow \frac{1}{2 + (u_n)^2} < \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow u_n \times \frac{1}{2 + (u_n)^2} < u_n \times \frac{1}{2} ; (u_n > 0)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{u_n}{2}$$

$$\text{و منه : } u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$$

$$\forall n \geq 0 : u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2} \text{ : خلاصة}$$

$$\text{ب- نستنتج أن : } \forall n \geq 0 : u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$$

$$\text{لدينا : } u_{n+1} \leq \frac{u_n}{2}$$

$$\bullet \text{ بالنسبة ل : } n = 0 \text{ إذن : } u_1 \leq \frac{u_0}{2}$$

$$\bullet \text{ بالنسبة ل : } n = 1 \text{ إذن : } u_2 \leq \frac{u_1}{2}$$

$$\bullet \text{ بالنسبة ل : } n = 2 \text{ إذن : } u_3 \leq \frac{u_2}{2}$$

$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\bullet \text{ بالنسبة ل : } n - 2 \text{ إذن : } u_{n-1} \leq \frac{u_{n-2}}{2}$$

$$\bullet \text{ بالنسبة ل : } n - 1 \text{ إذن : } u_n \leq \frac{u_{n-1}}{2}$$

جداء المتفاوتات السابقة طرف بطرف مع العلم أن كل طرف موجب نحصل بعد الاختزال

$$\text{على ما يلي : } u_n \leq \frac{u_0}{2^n} \text{ أي } u_n \leq \underbrace{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \dots \times \frac{1}{2}}_{n \text{ fois}} u_0$$

$$\forall n \geq 0 : u_n \leq \frac{u_0}{2^n} \text{ : خلاصة}$$

ملحوظة : يمكن الاستدلال على ذلك بالترجع .

$$\text{ج- نستنتج نهاية المتتالية } u_n$$

لدينا :

$$\bullet u_n > 0 \text{ حسب السؤال الأول}$$

$$\bullet u_n \leq \frac{u_0}{2^n} \text{ حسب السؤال الأخير}$$



• إذن : $0 < u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$.

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{2^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x \times u_0 = 0$; $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1\right)$. حسب خاصية .

ومنه حسب أحد مصادق التقارب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

.03

نعتبر المتتالية العددية $(u_n)_{n \geq 0}$ المعرفة كما يلي :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = \frac{u_n}{5 + 4u_n} \end{cases}$$

.01

أحسب : u_1 و u_2 .

لدينا : $u_1 = \frac{u_0}{5 + 4u_0} = \frac{3}{5 + 4 \times 3} = \frac{3}{17}$ و $u_2 = \frac{u_1}{5 + 4u_1} = \frac{\frac{3}{17}}{5 + 4 \times \frac{3}{17}} = \frac{3}{17} \times \frac{1}{5 + 4 \times \frac{3}{17}} = \frac{3}{17} \times \frac{1}{\frac{85 + 12}{17}} = \frac{3}{17} \times \frac{17}{97} = \frac{3}{97}$

خلاصة : $u_1 = \frac{3}{17}$ و $u_2 = \frac{3}{97}$

ب- بين أن : $u_n > 0$: $\forall n \geq 0$.

نستدل على ذلك بالترجع :

• نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$.

لدينا : $u_0 = 3 > 0$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$.

• نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $u_n > 0$ صحيحة (معطيات التراجع)

• نبين أن العلاقة صحيحة ل $n + 1$. أي نبين أن : $u_{n+1} > 0$.

لدينا : حسب معطيات التراجع : $(u_n > 0 \text{ و } 5 + 4u_n > 0) \Rightarrow u_n > 0$.

$$\Rightarrow \frac{u_n}{5 + 4u_n} > 0$$

$$\Rightarrow u_{n+1} > 0$$

إذن العلاقة صحيحة ل $n + 1$.

خلاصة : $\forall n \geq 0 : u_n > 0$

ج- بين أن : u_n تناقصية.

لدينا :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{u_n}{5 + 4u_n} - u_n \\ &= \frac{u_n - u_n(5 + 4u_n)}{5 + 4u_n} \end{aligned}$$



$$= \frac{u_n (1 - 5 - 4u_n)}{5 + 4u_n}$$

$$= \frac{-4u_n (1 + u_n)}{5 + 4u_n} < 0 \quad ; \quad (u_n > 0)$$

ومنه : $u_{n+1} - u_n < 0$ أي $u_{n+1} < u_n$.

خلاصة : u_n تناقصية

د- استنتج تقارب المتتالية u_n .

لدينا :

- $u_n > 0$ حسب السؤال الأول إذن u_n مصغرة

- u_n تناقصية.

- u_n متقارب (حسب خاصية) .

خلاصة : u_n متقارب

02...

أ- بين أن : $u_{n+1} \leq \frac{1}{5} u_n$: $\forall n \geq 0$.

لدينا :

$$u_n > 0 \Rightarrow 5 + 4u_n > 5$$

$$\Rightarrow \frac{1}{5 + 4u_n} < \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow u_n \times \frac{1}{5 + 4u_n} < u_n \times \frac{1}{5} \quad ; \quad (u_n > 0)$$

$$\Rightarrow u_{n+1} < \frac{u_n}{5}$$

ومنه : $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{5}$.

خلاصة : $\forall n \geq 0 : u_{n+1} \leq \frac{u_n}{5}$

ب- بين أن : $u_n \leq 3 \left(\frac{1}{5} \right)^n$: $\forall n \geq 0$.

لدينا : $u_{n+1} \leq \frac{u_n}{5}$

• بالنسبة ل : $n = 0$ إذن : $u_1 \leq \frac{u_0}{5}$.

• بالنسبة ل : $n = 1$ إذن : $u_2 \leq \frac{u_1}{5}$.

• بالنسبة ل : $n = 2$ إذن : $u_3 \leq \frac{u_2}{5}$.



- بالنسبة ل : $n-2$ إذن : $\frac{u_{n-2}}{5} \leq \frac{u_{n-1}}{5}$
- بالنسبة ل : $n-1$ إذن : $\frac{u_{n-1}}{5} \leq \frac{u_n}{5}$

جداء المتفاوتات السابقة طرف بطرف مع العلم أن كل طرف موجب نحصل بعد الاختزال

$$\forall n \geq 0 : u_n \leq 3 \left(\frac{1}{5} \right)^n \quad u_n \leq \frac{u_0}{5^n} \quad \text{ومنه : } u_n \leq \frac{u_0}{5^n} \quad \text{أي } u_n \leq \underbrace{\frac{1}{5} \times \frac{1}{5} \times \dots \times \frac{1}{5}}_{n \text{ fois}} u_0$$

خلاصة : $\forall n \geq 0 : u_n \leq 3 \left(\frac{1}{5} \right)^n$

ملحوظة : يمكن الاستدلال على ذلك بالترجع .

جـ- استنتج أن : $\forall n \geq 0 : 0 < u_n \leq 3 \left(\frac{1}{5} \right)^n$

لدينا :

• $u_n > 0$ حسب السؤال الأول

• $u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$ حسب السؤال الأخير

• إذن : $0 < u_n \leq \frac{u_0}{2^n}$

خلاصة : $\forall n \geq 0 : 0 < u_n \leq 3 \left(\frac{1}{5} \right)^n$

د- أوجد النهاية التالية : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_0}{2^n} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^x \times u_0 = 0$; $\left(-1 < \frac{1}{2} < 1 \right)$ حسب خاصية .

• ومنه حسب أحد مصادق التقارب $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

لتكن u_n و v_n متتاليتين معرفتين بما يلي : لكل n من $\mathbb{N}$: $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} \end{cases}$ و $\begin{cases} v_0 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} \end{cases}$; $n \in \mathbb{N}$

• طريقة 1 لتحديد نهاية u_n .

1. لنعتبر المتتالية s_n المعرفة ب : $\forall n \in \mathbb{N} , s_n = u_n + v_n$.

بين بالترجع أن المتتالية s_n ثابتة .

نستدل على ذلك بالترجع :



لدينا : $s_n = 2$ إذن نبين أن : $s_0 = u_0 + v_0 = 0 + 2 = 2$

- نتحقق أن العلاقة صحيحة ل $n = 0$.
- لدينا : $s_0 = u_0 + v_0 = 0 + 2 = 2$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة ل $n = 0$.
- نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $s_n = 2$ صحيحة (معطيات التراجع)
- نبين أن العلاقة صحيحة ل $n + 1$. أي نبين أن : $s_{n+1} = 2$.

لدينا :

$$s_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{4} + \frac{3v_n + 1}{4} = \frac{3(u_n + v_n) + 2}{4} = \frac{3s_n + 2}{4} = \frac{3 \times 2 + 2}{4} = 2$$

إذن : $s_{n+1} = 2$

إذن العلاقة صحيحة ل $n + 1$.

خلاصة : المتتالية s_n ثابتة مع $s_n = u_n + v_n = 2$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

2. لنعتبر المتتالية d_n المعرفة ب : $d_n = v_n - u_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

بين أن المتتالية d_n هندسية محددًا عناصرها المميزة .

لدينا :

$$d_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{3v_n + 1}{4} - \frac{3u_n + 1}{4} = \frac{3(v_n - u_n) + 1 - 1}{4} = \frac{3}{4}(v_n - u_n) = \frac{3}{4}d_n$$

ومنه : $d_{n+1} = \frac{3}{4}d_n$.

خلاصة : المتتالية d_n هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ وحدها الأول $d_n = v_0 - u_0 = 2 - 0 = 2$.

3. استنتج : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n$.

لدينا : المتتالية d_n هندسية أساسها $q = \frac{3}{4}$ إذن : $d_n = d_{n_0} \times q^{n-n_0} = d_0 \times q^n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

ومنه : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$; $\left(-1 < \frac{3}{4} < 1\right)$.

خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n - u_n = 0$.

4. نكتب u_n بدلالة s_n و d_n ؛ ثم u_n بدلالة n .

لدينا :

$$\begin{cases} s_n = u_n + v_n \\ d_n = v_n - u_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} s_n + d_n = 2v_n \\ s_n - d_n = 2u_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} v_n = \frac{s_n + d_n}{2} & (1) \\ u_n = \frac{s_n - d_n}{2} & (2) \end{cases}$$



$$\text{و منه : } u_n = \frac{s_n - d_n}{2} = \frac{2 - 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2} = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \left(\text{لأن : } d_n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n \text{ و } s_n = 2 \text{ ثابتة} \right)$$

خلاصة : $u_n = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$

ب- نكتب v_n بدلالة s_n و d_n ؛ ثم v_n بدلالة n .

$$\text{حسب العلاقة (1) : لدينا : } v_n = \frac{s_n + d_n}{2} \text{ ومنه } v_n = \frac{s_n + d_n}{2} = \frac{2 + 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n}{2} = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

خلاصة : $v_n = 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n$

ج- نستنتج $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1 ; \left(-1 < \frac{3}{4} < 1\right)$

• $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \left(\frac{3}{4}\right)^n = 1 ; \left(-1 < \frac{3}{4} < 1\right)$

خلاصة : $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$ و $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$

• طريقة 2 لمعرفة نهاية u_n مبيانيا .

لنعتبر الدالة العددية f للمتغير الحقيقي x المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}$. الرسم أسفله (C_f) يمثل منحنى للدالة f و المستقيم (Δ)

ذو المعادلة : $y = x$: (Δ) في معلم متعامد ممنظم $(O, \vec{i}, \vec{j})$ و وحدة القياس 5 cm

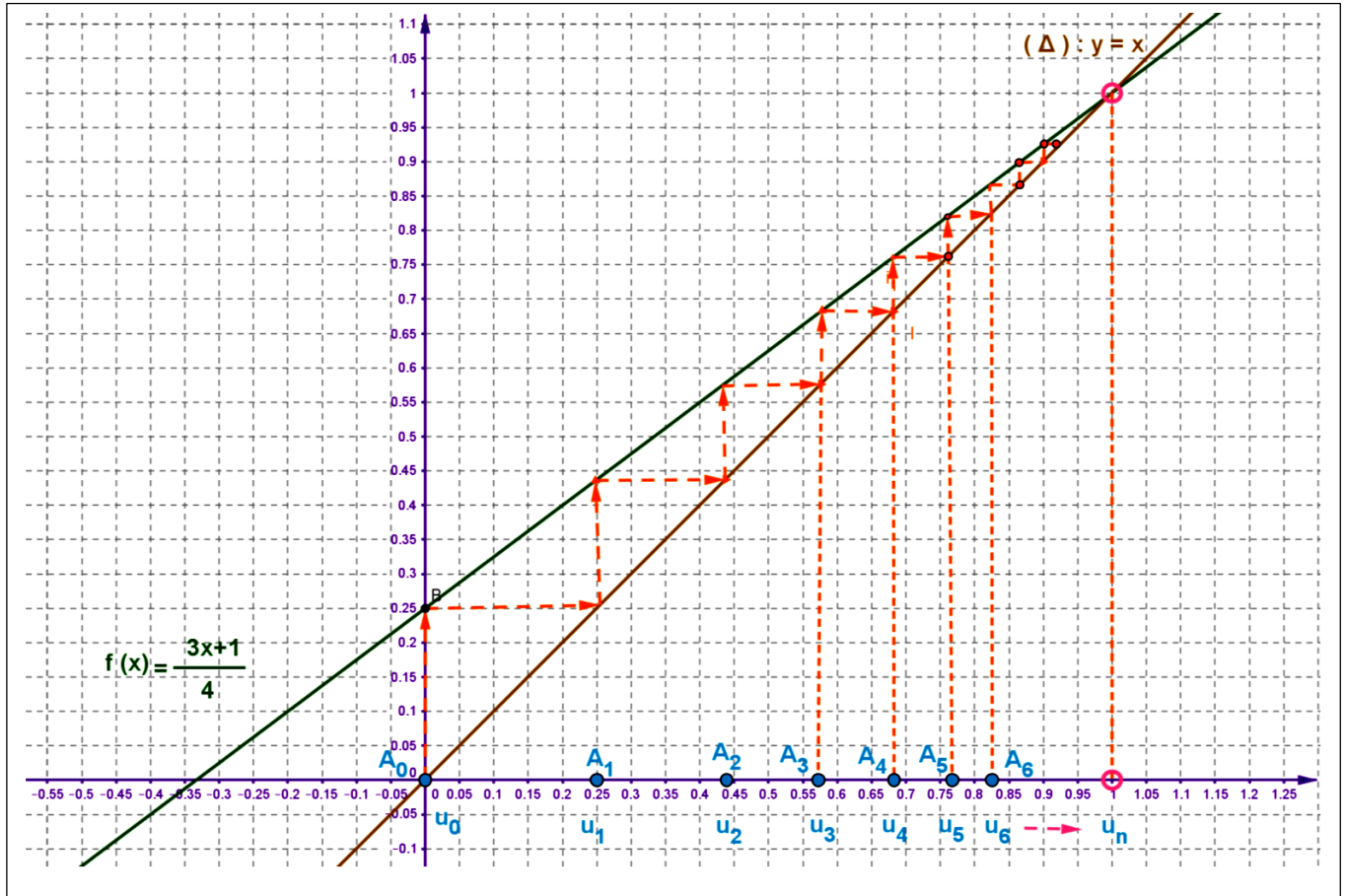
1. نمثل على محور الأفاصل النقاط A_0 و A_1 و A_2 و A_3 و A_4 التي أراتبها منعدمة و أفاصيلها هي u_0 و u_1 و u_2 و u_3 و u_4

على التوالي . مع $u_1 = \frac{1}{4} = 0,25$ و $u_2 = \frac{7}{16} \approx 0,44$ و $u_3 = \frac{37}{64} \approx 0,58$ و $u_4 = \frac{175}{256} \approx 0,69$

على المنحنى نضع المسلك الذي نتبعه للحصول على قيم هذه الحدود و هي ممثلة على محور الأفاصل بدون استعمال قيم u_1 و u_2 و

u_3 و u_4 .

أنظر الشكل الموالي :



2. ما هو التظنن الذي نحصل عليه ؟

- المتتالية u_n تزايدية .
- المتتالية u_n مكبورة ب 1 .
- الحدود u_n محصورة بين 0 و 1 أي $0 \leq u_n \leq 1$.
- المتتالية متقاربة .
- نهاية المتتالية هي 1 .
- طريقة 3 لتحديد نهاية u_n .

1.

أ- نعطي جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$.

جدول تغيرات الدالة f . لدينا : $f'(x) = \frac{3}{4}$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

ب- نبين أن : $f([0;1]) \subset [0;1]$.



لدينا :

• الدالة f متصلة على $[0;1]$ (حدودية)

• الدالة f تزايدية قطعاً على $[0;1]$

ومنه : $f([0;1]) = [f(0), f(1)] = \left[\frac{1}{4}; 1\right] \subset [0;1]$

ج- أكتب المتتالية (u_n) مستعملاً الدالة f .

لدينا : $u_{n+1} = f(u_n)$

2.

أ- بين ان : $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 \leq u_n \leq 1$

نستدل على ذلك بالترجع :

• نتحقق أن العلاقة صحيحة لـ $n = 0$

لدينا : $u_0 = 0$ ومنه : $0 \leq u_0 = 0 \leq 1$ و بالتالي العلاقة صحيحة بالنسبة لـ $n = 0$

• نفترض أن العلاقة صحيحة إلى n أي $0 \leq u_n \leq 1$ صحيحة (معطيات التراجع)

• نبين أن العلاقة صحيحة لـ $n + 1$. أي نبين أن : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

لدينا : حسب معطيات التراجع $0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow \frac{3}{4} \times 0 \leq \frac{3}{4} \times u_n \leq \frac{3}{4} \times 1$

$$\Rightarrow \frac{3}{4} \times 0 + \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \times u_n + \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \times 1 + \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4} \times u_n + \frac{1}{4} \leq 1$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{1}{4} \leq u_{n+1} \leq 1$$

ومنه : $0 \leq u_{n+1} \leq 1$

إذن العلاقة صحيحة لـ $n + 1$

خلاصة : $\forall n \geq 0 : 0 \leq u_n \leq 1$

ب- بين أن (u_n) تزايدية .

لدينا :

$$u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + 1}{4} - u_n$$

$$= \frac{-u_n + 1}{4} \geq 0 \quad ; \quad (0 \leq u_n \leq 1 \Rightarrow 1 - u_n \geq 0)$$

ومنه : $u_{n+1} - u_n \geq 0$ أي $u_{n+1} \geq u_n$

خلاصة : u_n تزايدية

ج- استنتج أن : (u_n) لها نهاية منتهية .

لدينا :

- $u_n \leq 1$ حسب السؤال الأول إذن u_n مكبورة بـ 1 .



- u_n تزايدية.

- u_n متقارب (حسب خاصية) .

خلاصة : u_n متقارب إذن لها نهاية منتهية .

د- بين أن : $l \leq 1$

بما أن جميع الحدود محصورة بين 0 و 1 إذن l نهاية u_n تحقق $l \leq 1$

ه- حدد قيمة l .

لدينا :

• الدالة f متصلة على $[0;1]$.

• $f([0;1]) \subset [0;1]$.

• $u_n = 0 \in [0;1]$.

• u_n متقارب .

إذن : l نهاية u_n هي حل للمعادلة $f(x) = x$; $x \in [0;1]$.

نحل المعادلة :

لدينا :

$$f(x) = x \Leftrightarrow \frac{3x+1}{4} = x$$

$$\Leftrightarrow 3x+1 = 4x$$

$$\Leftrightarrow -x+1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

ومنه : $l = 1$

خلاصة : قيمة l نهاية المتتالية u_n هي $l = 1$.