

الأستاذ:
نجيب
عثماني

تمارين محلولة: الدوال الأصلية
المستوى : الثانية باك علوم فيزيائية وعلوم الحياة
والأرض والعلوم الزراعية

أكاديمية
الجهة
الشرقية

جداول تمكنا من البحث عن الدوال الأصلية

الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على مجال I
$x \mapsto k; k \in \mathbb{R}$	$x \mapsto kx + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x$	$x \mapsto \frac{x^2}{2} + c; c \in \mathbb{R}$
الدالة f	الدوال الأصلية للدالة f على مجال I
$x \mapsto x^n; n \in \mathbb{N}^*$	$x \mapsto \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^2}$	$x \mapsto -\frac{1}{x} + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}; n \in (\mathbb{N}^* - \{1\})$	$x \mapsto \frac{1}{-n+1} x^{-n+1} + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x}}$	$x \mapsto 2\sqrt{x} + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto x'; r \in (\mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$x \mapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \cos(x)$	$x \mapsto \sin(x) + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \sin(x)$	$x \mapsto -\cos(x) + c; c \in \mathbb{R}$
$x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \mapsto \tan(x) + c; c \in \mathbb{R}$
الدالة f معرفة على مجال I	دالة أصلية للدالة f على المجال I
$u' + v'$	$u + v$
$uv' + vu'$	uv
$u'u^n; n \in \mathbb{N}^*$	$\frac{1}{n+1} u^{n+1}$
$\frac{u'}{u^2}$	$-\frac{1}{u}$
$u'u'; r \in (\mathbb{Q}^* - \{-1\})$	$\frac{1}{r+1} u^{r+1}$
$\frac{u'}{\sqrt{u}}$	$2\sqrt{u}$
$\frac{u'v - uv'}{v^2}$	$\frac{u}{v}$
$x \mapsto u'(ax+b); a \in \mathbb{R}^*; b \in \mathbb{R}$	$x \mapsto \frac{1}{a} u(ax+b)$

تمرين 1: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي:

$$f(x) = x^2 + 2x + 3$$

- حدد دالة F قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ بحيث $(\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = f(x)$
- هل توجد دالة أخرى G بحيث $(\forall x \in \mathbb{R}); G'(x) = f(x)$
- كم توجد من دالة F بحيث $(\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = f(x)$ ؟

الأجوبة (1): الدالة المعرفة كالتالي :

$$F(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x$$

$$\text{على } \mathbb{R} \text{ وتحقق } (\forall x \in \mathbb{R}); F'(x) = f(x)$$

نقول أن F : دالة أصلية للدالة f على $\mathbb{R}$

(2) الدالة المعرفة كالتالي :

$$G(x) = \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + 2$$

$$\text{وتحقق أيضا } (\forall x \in \mathbb{R}); G'(x) = f(x)$$

اذن أيضا G : دالة أصلية أخرى للدالة f على $\mathbb{R}$

(3) هناك عدد لا منته من الدوال الأصلية للدالة f

ونقول مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $\mathbb{R}$ هي

$$x \mapsto \frac{1}{3}x^3 + x^2 + 3x + k$$

حيث k عدد حقيقي.

تمرين 2: نعتبر الدالة f المعرفة على $]0; +\infty[$ كالتالي:

$$f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$$

- حدد مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على $]0; +\infty[$
- حدد الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(1) = 3$

الأجوبة 1: $f(x) = 2x^2 + x + 1 + \frac{1}{x^2}$

$$\text{اذن : } F(x) = 2 \times \frac{1}{3}x^{2+1} + \frac{1}{2}x^{1+1} + 1x - \frac{1}{x^2} + k$$

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x} + k \text{ حيث } k \in \mathbb{R}$$

$$F(1) = 3 \Rightarrow \frac{2}{3} \times 1^3 + \frac{1}{2} \times 1^2 + 1 - \frac{1}{1} + k = 3 \Rightarrow \frac{7}{6} + k = 3$$

$$\frac{7}{6} + k = 3 \Rightarrow k = 3 - \frac{7}{6} = \frac{11}{6}$$

$$k = \frac{11}{6} \Rightarrow k = 3 - \frac{7}{6}$$

ومنه الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(1) = 3$

$$F(x) = \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{x} + \frac{11}{6}$$

تمرين 3: حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1 \quad (2) \quad f(x) = 5x^4 + 3x + 1 \quad (1)$$

$$f(x) = (2x-1)^3 \quad (4) \quad f(x) = \sin x + x \cos x \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x}{(x^2-1)^2} \quad (5)$$

أجوبة: (1) $f(x) = 5x^4 + 3x + 1$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = 5 \times \frac{1}{5} x^5 + 3 \times \frac{1}{2} x^2 + 1x + k$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \cos x + \sin x - 1 \quad (2)$$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = 2\sqrt{x} + \sin x - \cos x - x + k$

$$f(x) = \sin x + x \cos x = x' \sin x + x(\sin x)' \quad (3)$$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = x \times \sin x + k$

$$f(x) = (2x-1)^3 = \frac{1}{2} (2x-1)' (2x-1)^3 \quad (4)$$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3+1} (2x-1)^{3+1} + k$

ومنه $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \frac{1}{8} (2x-1)^4 + k$

$$f(x) = -\frac{(x^2-1)'}{(x^2-1)^2} \quad \text{يعني} \quad f(x) = -\frac{x}{(x^2-1)^2} \quad (5)$$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \frac{1}{x^2-1} + k$

تمرين 4: حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

$$f(x) = 2\cos x - \sin x - 3 \quad (2) \quad f(x) = 8x^3 + 4x^2 + x + 6 \quad (1)$$

$$f(x) = (4x+5)^2 \quad (4) \quad f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x \quad (3)$$

$$f(x) = \frac{x^2}{(x^3+2)^2}$$

أجوبة:

$$f(x) = 8x^3 + 4x^2 + x + 6 \quad (1)$$

$$F(x) = 8 \times \frac{1}{4} x^4 + 4 \times \frac{1}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 6x + k = 2x^4 + \frac{4}{3} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + 6x + k$$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث

$$f(x) = 2\cos x - \sin x - 3 \quad (2)$$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث $f(x) = 2\sin x + \cos x - 3x + k$

$$f(x) = 2x \sin x + x^2 \cos x = (x^2)' \sin x + x^2 (\sin x)' \quad (3)$$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = x^2 \times \sin x + k$

$$f(x) = (4x+5)^2 \quad (4)$$

$$f(x) = (4x+5)^2 = \frac{1}{4} (4x+5)' (4x+5)^2$$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2+1} (4x+5)^{2+1} + k$

ومنه $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \frac{1}{12} (4x+5)^3 + k$

$$f(x) = -\frac{1}{3} \left(-\frac{(x^3+2)'}{(x^3+2)^2} \right) \quad \text{يعني} \quad f(x) = \frac{x^2}{(x^3+2)^2} \quad (5)$$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = -\frac{1}{3} \frac{1}{x^3+2} + k$

تمرين 5: حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \quad (2) \quad f(x) = 2\sqrt{2x+1} \quad (1)$$

$$f(x) = 2\sqrt{2x+1} = (2x+1)' (2x+1)^{\frac{1}{2}} \quad (1) \quad \text{أجوبة:}$$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (2x+1)^{\frac{1}{2}+1} + k$

ومنه $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} + k$

ومنه $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \frac{2}{3} (2x+1)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} (\sqrt{2x+1})^3 + k$

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{(x^2+1)'}{2\sqrt{x^2+1}} \quad (2)$$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \sqrt{x^2+1} + k$

تمرين 6: حدد مجموعة الدوال الأصلية للدوال التالية :

$$f(x) = \sin(4x-1) \quad (3) \quad f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{8+x^3}} \quad (2) \quad f(x) = x\sqrt{x^2+1} \quad (1)$$

$$f(x) = (\sin x)^2 \cos x \quad (5) \quad f(x) = \cos(2x+8) \quad (4)$$

$$f(x) = x\sqrt{x^2+1} = \frac{1}{2} (x^2+1)' (x^2+1)^{\frac{1}{2}} \quad (1) \quad \text{أجوبة:}$$

اذن $F(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x^2+1)^{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{1}{3} (x^2+1)^{\frac{3}{2}} + k$

ومنه $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \frac{1}{3} (\sqrt{x^2+1})^3 + k$

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{8+x^3}} = \frac{2}{3} \frac{(8+x^3)'}{2\sqrt{8+x^3}} \quad (2)$$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{8+x^3} + k$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = -\frac{1}{4} \cos(4x-1) + k$

اذن $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x+8) + k$

$$f(x) = (\sin x)' (\sin x)^2 \quad \text{يعني} \quad f(x) = (\sin x)^2 \cos x \quad (5)$$

ومنه $F(x) = \frac{1}{2+1} (\sin x)^{2+1} + k$

يعني $k \in \mathbb{R}$ حيث $F(x) = \frac{1}{3} (\sin x)^3 + k$

تمرين 7: نعتبر الدالة f المعرفة على $[0; +\infty[$

$$f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2} \quad \text{كالتالي:}$$

1. حدد العددين الحقيقيين a و b بحيث:

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2}$$

2. حدد الدالة الأصلية F للدالة f بحيث $F(1) = \frac{5}{2}$

أجوبة: (1)

$$f(x) = a + \frac{b}{(x+1)^2} = \frac{a(x+1)^2 + b}{(x+1)^2} = \frac{ax^2 + 2ax + a + b}{(x+1)^2}$$

بالمقارنة مع الكتابة: $f(x) = \frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$

نجد أن: $\begin{cases} a=1 \\ a=1 \\ b=-1 \end{cases} \quad \text{يعني} \quad \begin{cases} a=1 \\ 2a=2 \\ a+b=0 \end{cases}$ ومنه: $f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2}$

$$f(x) = 10 \frac{(x^2+4)'}{(x^2+4)^2} + 5 \text{ يعني } f(x) = \frac{20x}{(x^2+4)^2} + 5 \quad (2)$$

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad k \in \mathbb{R} \quad F(x) = -\frac{10}{x^2+4} + 5x + k \text{ : ومنه}$$

$$k = \frac{15}{2} \text{ يعني } k = 5 + \frac{5}{2} \text{ يعني } -\frac{10}{4} + k = 5 \text{ يعني } F(0) = 5 \quad (3)$$

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad F(x) = -\frac{10}{x^2+4} + 5x + \frac{15}{2} \text{ : ومنه}$$

$$f(x) = 1 - \frac{(x+1)'}{(x+1)^2} \text{ يعني } f(x) = 1 - \frac{1}{(x+1)^2} \quad (2)$$

$$\forall x \in [0; +\infty[\quad k \in \mathbb{R} \quad F(x) = x + \frac{1}{x+1} + k \text{ : ومنه}$$

تمرين 8: نعتبر الدالة f

$$f(x) = x\sqrt{x-1} \text{ : كالتالي } [1; +\infty[\text{ المعرفة على}$$

$$1. \text{ بين أن : } \forall x \in [1; +\infty[\quad f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1}$$

$$2. \text{ حدد الدالة الأصلية } F \text{ للدالة } f \text{ بحيث } F(2) = 1$$

أجوبة:

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} = \sqrt{(x-1)^2} \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = |x-1| \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} \quad (1)$$

$$\text{نعلم أن : } x \in [1; +\infty[\text{ إذن : } x-1 \geq 0 \text{ يعني}$$

$$|x-1| = x-1 \text{ : ومنه}$$

$$\text{إذن :}$$

$$\sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1} = (x-1) \times \sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1} - 1\sqrt{x-1} + \sqrt{x-1} = x\sqrt{x-1}$$

$$(2) \text{ يعني } f(x) = \sqrt{(x-1)^3} + \sqrt{x-1}$$

$$f(x) = \left((x-1)^3\right)^{\frac{1}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)^{\frac{1}{2}} = (x-1)'(x-1)^{\frac{3}{2}} + (x-1)'(x-1)^{\frac{1}{2}}$$

إذن

$$F(x) = \frac{1}{\frac{3}{2}+1} (x-1)^{\frac{3}{2}+1} + \frac{1}{\frac{1}{2}+1} (x-1)^{\frac{1}{2}+1} + k = \frac{2}{5} (x-1)^{\frac{5}{2}} + \frac{2}{3} (x-1)^{\frac{3}{2}} + k$$

$$\text{ومنه } F(x) = \frac{2}{5} (\sqrt{x-1})^5 + \frac{2}{3} (\sqrt{x-1})^3 + k \text{ حيث } k \in \mathbb{R}$$

تمرين 9: نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ كالتالي:

$$f(x) = \frac{5x^4 + 40x^2 + 20x + 80}{(x^2+4)^2}$$

$$1. \text{ حدد الأعداد الحقيقية } a \text{ و } b \text{ و } c$$

$$\text{بحيث : } \forall x \in [0; +\infty[\quad f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c$$

$$2. \text{ حدد مجموعة الدوال الأصلية للدالة } f$$

$$3. \text{ حدد الدالة الأصلية } F \text{ للدالة } f \text{ بحيث } F(0) = c$$

أجوبة :

$$f(x) = \frac{ax+b}{(x^2+4)^2} + c = \frac{ax+b+c(x^2+4)^2}{(x^2+4)^2} = \frac{ax+b+cx^4+8cx^2+16c}{(x^2+4)^2}$$

$$f(x) = \frac{cx^4+8cx^2+ax+(b+16c)}{(x^2+4)^2}$$

$$\text{بالمقارنة مع الكتابة : } f(x) = \frac{5x^4+40x^2+20x+80}{(x^2+4)^2}$$

$$\text{ نجد أن : } \begin{cases} c=5 \\ 8c=40 \\ a=20 \\ b+16c=80 \end{cases} \text{ يعني } \begin{cases} c=5 \\ a=20 \\ b=0 \end{cases} \text{ ومنه :}$$

$$f(x) = \frac{20x}{(x^2+4)^2} + 5$$

« c'est en forgeant que l'on devient forgeron » dit un proverbe.
c'est en s'entraînant régulièrement
aux calculs et exercices que l'on
devient un mathématicien

