

الدوال الأصلية

1- تعريف :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال I . نقول أن الدالة F دالة أصلية للدالة f على I إذا وفقط إذا كان :
 F دالة قابلة للاشتقاق على المجال I .
ولكل x من I : $F'(x) = f(x)$

مثال :

1- لتكن $F(x) = x^2 + x + 1$
إذن : $F'(x) = 2x + 1$
إذن : الدالة F هي دالة أصلية للدالة f المعرفة بـ : $f(x) = 2x + 1$

2- حدد دالة أصلية لكل دالة من الدوال التالية :

-a $f(x) = 2$
 $F(x) = 2x + C \quad / \quad C \in \mathbb{R}$

-b $f(x) = x$
 $F(x) = \frac{1}{2} x^2 + C$

-c $f(x) = x^3$
 $F(x) = \frac{1}{4} x^4 + C$

-d $f(x) = x^n \quad / \quad n \in \mathbb{N}^*$
 $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

-e $f(x) = x^r \quad ; \quad r \in \mathbb{N}^* - \{-1\}$
 $F(x) = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + C$

-f $f(x) = \sqrt{x}$
 $= x^{\frac{1}{2}}$
 $F(x) = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + Cte$

-g $f(x) = (x^2 + 1)^3 (2x)$
 $F(x) = \frac{1}{4} (x^2 + 1)^4 + Cte$

الأصلية : $u^r \cdot u'$: $\frac{1}{r+1} u^{r+1} + C$

2- خاصية :

لتكن f دالة عددية.
إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على مجال I فإن مجموعة الدالة الأصلية للدالة f على I هي :
 $F + \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$.

برهان :

لتكن F دالة أصلية للدالة f على I و λ عدد حقيقي.
لدينا : $(F + \lambda)' = F' = f$
إذن : $F + \lambda$ هي أيضا دالة أصلية للدالة f على I .
ومنه : مجموعة الدوال الأصلية للدالة f على I هي $F + \lambda$.

3- خاصية :

لتكن f دالة عددية تقبل دالة أصلية على I .
ليكن x_0 من I و y_0 عنصر حقيقي $y_0 \in \mathbb{R}$.
توجد دالة أصلية وحيدة F للدالة f على I .
حيث : $F(x_0) = y_0$

أمثلة :

حدد الدالة الأصلية للدالة f والتي تحقق الشرط $F(x_0) = y_0$

1- $f(x) = x + 1$ $F(2) = 1$
لدينا : $F(x) = \frac{1}{2} x^2 + x + C = 1$
وبما أن : $F(2) = 1$
فإن : $\frac{1}{2} x^2 + x + C = 1$
 $2 + 2 + C = 1$
ومنه : $C = -3$

2- $f(x) = \frac{2}{x^2 + 1}$ $F(0) = 0$

لدينا : $F(x) = 2 \operatorname{Arc tan} x + C$
وبما أن : $F(0) = 0$
فإن : $C = 0$
إذن : $F(x) = 2 \operatorname{Arc tan} x$

3- $f(x) = \cos 2x$ $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$

لدينا : $F(x) = \frac{1}{2} \sin (2x) + C$
وبما أن : $F\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
فإن : $C = 0$

$$F(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$$

-4 خاصية :

- إذا كانت F دالة أصلية للدالة f على I .
 و G دالة أصلية للدالة g على I .
 فإن : الدالة $F+G$ دالة أصلية للدالة $f+g$ على I .

-5 خاصية :

كل دالة متصلة على مجال I تقبل دالة أصلية .

ملاحظة و خاصية :

إذا كانت F و G دالتين أصليتين للدالة f على I ، فإنه يوجد عدد حقيقي λ
 حيث : $F - G = \lambda$

-6 جدول الدوال الأصلية الاعتيادية :

ملاحظات	الدالة F (الأصلية)	الدالة f
$C \in \mathbb{R}$	$x + C$	1
	$\frac{1}{2}x^2 + C$	x
$n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$	x^n
$r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\frac{1}{r+1}x^{r+1} + C$	x^r
$n \in \mathbb{N}$	$\frac{1}{n+1}u^{n+1} + C$	$u^n \cdot u'$
$r \in \mathbb{Q} - \{-1\}$	$\frac{1}{r+1}u^{r+1} + C$	$u^r \cdot u'$
	$\text{Arc tan } x + C$	$\frac{1}{x^2 + 1}$
	$\sin x + C$	$\cos x$
	$-\cos x + C$	$\sin x$
$a \neq 0$	$\frac{1}{a} \sin(ax+b) + C$	$\cos(ax+b)$
$a \neq 0$	$\frac{-1}{a} \cos(ax+b) + C$	$\sin(ax+b)$
$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$	$\tan x + C$	$1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$

تطبيقات :

حدد دالة أصلية للدالة f في الحالات التالية :

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} \quad -1$$

$$= \frac{x^2 + 1 - 2}{x^2 + 1}$$

$$= \frac{-2}{x^2 + 1} + 1$$

$$F(x) = x - 2 \operatorname{Arc} \tan x + C \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) = x \sqrt[3]{x^2 + 1} \quad -2$$

$$f(x) = \frac{1}{2} 2x \sqrt[3]{x^2 + 1} \quad \text{لدينا :}$$

$$= \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}} (2x)$$

$$F(x) = \frac{1}{2} \frac{1}{\frac{1}{3}+1} (x^2 + 1)^{\frac{1}{3}+1} \quad \text{ومنه :}$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} (x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}$$

$$= \frac{3}{8} (x^2 + 1)^{\frac{4}{3}}$$

$$F(x) = \frac{3}{8} \sqrt[3]{x^2 + 1}^4 \quad \text{إذن :}$$

$$f(x) = (2x + 1) \sqrt{x^2 + x + 3} \quad -3$$

$$= (x^2 + x + 3)^{\frac{1}{2}} (2x + 1)$$

$$F(x) = \frac{2}{3} (x^2 + x + 3)^{\frac{3}{2}}$$

$$f(x) = \frac{\sin^3 x}{\cos^5 x} \quad -4$$

$$F(x) = \tan^3 x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{4} \tan^4 x$$

$$f(x) = \sqrt[3]{(x^2 + 1)^2} x \quad \text{لدينا :} \quad -5$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} (x^2 + 1)^{\frac{2}{3}} 2x \\ F(x) &= \frac{1}{2} \frac{3}{5} (x^2 + 1)^{\frac{5}{3}} + C && \text{إذن :} \\ &= \frac{3}{10} (x^2 + 1)^{\frac{5}{3}} + C \end{aligned}$$