

دراسة الدوال

4 اشتقاق الدالة العكسية

إذا كانت f قابلة للاشتقاق ورتيبة قطعاً على مجال I و $(\forall x \in I): f'(x) \neq 0$ فإن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $J = f(I)$ و

$$(\forall x \in J): (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

5 الدوال المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية.

$(f+g)' = f' + g'$ (12)	$(a)' = 0$ (1)
$(af)' = af'$ (13)	$(x)' = 1$ (2)
$(f \cdot g)' = f'g + fg'$ (14)	$(ax)' = a$ (3)
$(f^r)' = rf' \cdot f^{r-1}$ (15)	$(x^r)' = rx^{r-1}$ (4)
$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{fg' - gf'}{g^2}$ (16)	$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ (5)
$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$ (17)	$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ (6)
$(\sin x)' = \cos x$ (18)	$(\sqrt{u(x)})' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u(x)}}$ (7)
$(\cos x)' = -\sin x$ (19)	$(\sqrt[3]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{3(\sqrt[3]{u(x)})^2}$ (8)
$(\tan x)' = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ (20)	$(\sqrt[n]{u(x)})' = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$ (9)
$(\sin(u(x)))' = u'(x) \cos(u(x))$ (21)	$(\text{Arc tan } x)' = \frac{1}{1+x^2}$ (10)
$(\cos u(x))' = -u'(x) \sin(u(x))$ (22)	$(\text{Arc tan}(u(x)))' = \frac{u'(x)}{1+(u(x))^2}$ (11)
$(\tan(u(x)))' = u'(x)(1 + \tan^2(u(x)))$ (23)	

ملاحظة:

- (a) لتكن u دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .
 الدالة $f(x) = \sqrt[n]{u(x)}$ قابلة للاشتقاق على $D_f - \{x/u(x)=0\}$.
 (b) إذا كانت f دالة تغير الصيغة في x_0 أو إذا كان الحد الموجود تحت الجذر ينعدم في x_0 . يجب دراسة اشتقاق f في x_0 باستعمال معدل التغير.

I- الاشتقاق

1 تعاريف

- (a) تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا كانت
- $$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$
- ونكتب $f'(x_0) = l$
- (b) تكون f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 إذا كان
- $$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$
- ونكتب $f'_d(x_0) = l$
- (c) تكون f قابلة للاشتقاق على يسار x_0 إذا كان
- $$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = l \in \mathbb{R}$$
- ونكتب $f'_g(x_0) = l$
- (d) تكون f قابلة للاشتقاق في x_0 إذا وفقط إذا كانت f قابلة للاشتقاق على يمين ويسار x_0 و $f'_d(x_0) = f'_g(x_0)$

2 التاويل الهندسي.

- (a) إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى C_f يقبل مماساً (T) في النقطة $M(x_0, f(x_0))$ معاملة الموجه $f'(x_0)$ معادلته $(T): y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- (b) إذا كانت f قابلة للاشتقاق على يمين x_0 فإن C_f يقبل نصف مماس (T_d) على يمين $M(x_0, f(x_0))$ معاملة الموجه $f'_d(x_0)$ معادلته $(T_d): y = f'_d(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$
- (c) لدينا نتيجة مماثلة بالنسبة للاشتقاق على اليسار.
- (d) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأرتايب وموجه نحو الأعلى على يمين $M(x_0, f(x_0))$
- (e) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأرتايب وموجه نحو الأسفل على يمين $M(x_0, f(x_0))$
- (f) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأرتايب وموجه نحو الأسفل على يسار $M(x_0, f(x_0))$
- (g) إذا كانت $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$ فإن f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0 و C_f يقبل نصف مماس موازي لمحور الأرتايب وموجه نحو الأعلى على يسار $M(x_0, f(x_0))$

ملاحظة:

- (*) إذا كانت f قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى C_f يمر بشكل عادي من النقطة $M(x_0, f(x_0))$ (لا ينكسر).
- (*) وإذا كانت f غير قابلة للاشتقاق في x_0 فإن المنحنى C_f (ينكسر) في النقطة $M(x_0, f(x_0))$ ويكون زاوية.

3 اشتقاق مركب دالتين

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I و

$$(\forall x \in I) \quad (g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

6) رتبة دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I .

(a) تكون f تزايدية على I إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in I) f'(x) \geq 0$$

(b) تكون f تناقصية على I إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in I) f'(x) \leq 0$$

(c) تكون f ثابتة على I إذا وفقط إذا كان:

$$(\forall x \in I) f'(x) = 0$$

7) مطراف دالة:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I . يكون للدالة f مطرافا في x_0 إذا وفقط إذا كانت f' تتعدم وتغير الإشارة في x_0 .

8) التفرع:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I .

(a) يكون C_f محدبا " $\cup$ " إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I): f''(x) \geq 0$

(b) يكون C_f مقعرا " $\cap$ " إذا وفقط إذا كان $(\forall x \in I): f''(x) \leq 0$

9) نقطة انعطاف:

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق مرتين على مجال I وليكن $x_0 \in I$. تكون النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف إذا وفقط إذا كانت f' تتعدم وتغير الإشارة في x_0 .

ملاحظة:

(a) إذا كانت f تتعدم ولا تغير الإشارة في x_0 فإن النقطة $M(x_0, f(x_0))$ نقطة انعطاف ويكون المماس في هذه النقطة موازيا لمحور الأفاصيل

(b) إذا أردنا تحديد جميع نقط انعطاف أو دراسة التفرع نحسب $f''(x)$ ونذكر إشارتها.

II - التمثيل المبياني لدالة

1) محور تماثل - مركز تماثل:

(a) يكون المستقيم $\Delta: x=a$ محور تماثل المنحنى C_f إذا وفقط إذا كان:

$$2a - x \in D_f \quad D_f \text{ لكل } x \text{ من}$$

$$(\forall x \in D_f): f(2a - x) = f(x) \quad (*)$$

(b) تكون النقطة $\Omega(a, b)$ مركز تماثل المنحنى C_f إذا وفقط إذا كان:

$$2a - x \in D_f \quad D_f \text{ لكل } x \text{ من}$$

$$(\forall x \in D_f): f(2a - x) = 2b - f(x) \quad (*)$$

2) الفروع اللانهائية:

(a) تعريف

نقول إن C_f يقبل فرعاً لا نهائياً إذا كان $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ أو } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b$$

(b) تصنيف الفروع اللانهائية

$$(1) \text{ إذا كان } \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

فإن المستقيم $\Delta: x=a$ مقارب لـ C_f بجوار a .

$$(2) \text{ إذا كان } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = b$$

فإن المستقيم $\Delta: y=b$ مقارب لـ C_f بجوار ∞ .

$$(3) \text{ إذا كان } \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty \text{ نقوم بحساب } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$(a) \text{ إذا كان } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \infty$$

فإن C_f يقبل فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الأرتيب بجوار ∞ .

$$(b) \text{ إذا كان } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

فإن C_f يقبل فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الأفاصيل بجوار ∞ .

$$(c) \text{ إذا كان } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a \neq 0 \text{ نقوم بحساب } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax)$$

$$(i) \text{ إذا كان } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = b$$

فإن المستقيم $\Delta: y = ax + b$ مقارب لـ C_f بجوار ∞ .

$$(ii) \text{ إذا كان } \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \infty$$

فإن C_f يقبل فرعاً شلجيميا اتجاهه $y = ax$ بجوار ∞ .

ملاحظة:

يكون المستقيم $\Delta: y = ax + b$ مقارباً لـ C_f بجوار ∞ إذا وفقط إذا

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - (ax + b)) = 0$$

ونستعمل هذه الخاصية إذا كان السؤال هو بين أن $\Delta: y = ax + b$ مقارب أو إذا كانت $f(x)$ تكتب على شكل $f(x) = ax + b + h(x)$

مع $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = 0$

3) بعض الملاحظات:

(a) حلول المعادلة $f(x) = m$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع

$$\text{المستقيم } \Delta: y = m$$

(b) حلول المعادلة $f(x) = 0$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f مع محور

الأفصيل.

(c) حلول المعادلة $f(x) = g(x)$ هي أفاصيل نقط تقاطع C_f و C_g .

(d) حلول المتراحة $f(x) \leq g(x)$ هي المجالات التي يكون

فيها C_f تحت C_g .

(e) من أجل دراسة وضع C_f بالنسبة للمستقيم $\Delta: y = ax + b$ نقوم

بدراسة إشارة $f(x) - y$

(*) إذا كان $f(x) - y \geq 0$ فإن C_f يوجد فوق Δ .

(*) إذا كان $f(x) - y \leq 0$ فإن C_f يوجد تحت Δ .