

تقديم

حاول العلماء منذ العصور القديمة تحديد مماسات لبعض المنحنيات . وقد قدم أرخميدس (Archimède) (212-278) مقترحا في هذا الصدد. وأسفرت أعمال جملة من الرياضيين و الفيزيائيين ، فيما بعد، خاصة نيوتن (Newton) (1642-1727م) وليبنيتز (Leibniz) (1646-1716م) في تحديد عام لمماسات منحنيات دوال ، وتحديد سرعة جسم متحرك . كما نتج عن تقدم الحساب التفاضلي تطور لمفهوم الاشتقاق . ويرجع الفضل للعالم الرياضي والفلكي الفرنسي افضالي الأصل لاغرانج Louis, Joseph Lagrange de compte (1736-1813 م) في إدخال كلمة " المشتقة " وفي وضع الترميز $f'(x)$ الذي عرف كنهاية لمعدل التغير.



غوتفريد لايبنتس



جوزيف لوي لاغرانج

نبذة عن عالم

غوتفريد فيلهيلم من لايبنتز (أيضاً لايبنتز) الحديث لمبدأ انحفاظ الطاقة.



1646-1716 فيلسوف ألماني، عالم طبيعة، عالم رياضيات، دبلوماسي، مكثي، ومحامي. يرتبط اسم لايبنتز بالتعبير " دالة رياضية " (1694)، التي كان يصف بها كل كمية متعلقة ب منحني، مثل ميل المنحني أو نقطة معينة على المنحني.

يعتبر لايبنتز مع نيوتن أحد مؤسسي علم التفاضل و التكامل و بخاصة تطوير مفهوم التكامل و قاعدة الجداء ، كما طور المفهوم

بطاقة تقنية رقم : 02	
ثانوية : الفتح التأهيلية السنة الدراسية : 2015 – 2016 الأستاذ : عادل بناجي	المستوى : الثانية باكوريا علوم تجريبية درس : الاشتقاق التدبير الزمني : 5 ساعات
فقرات الدرس	• تذكير وإضافات • العمليات على الدوال المشتقة • الاشتقاق والاتصال • مشتقة مركب دالتين • مشتقة الدالة العكسية
المكتسبات القبلية	• النهايات و الاتصال • مفاهيم أساسية حول مفهوم الاشتقاق • تطبيقات الاشتقاق (رتابة دالة عددية - مطارف دالة عددية - المعادلة التفاضلية $(y' + \omega^2 y = 0$) • دراسة الدوال العددية
الكفاءات المستهدفة	• حساب مشتقات الدوال الاعتيادية ؛ • تحديد رتابة دالة انطلاقا من إشارة مشتقتها ؛ • تحديد إشارة دالة انطلاقا من جدول تغيراتها أو من تمثيلها البياني ؛ • تحديد العدد المشتق في نقطة للدالة العكسية لدالة ؛ • تحديد رتابة الدالة العكسية لدالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال
التوجيهات التربوية	• يتم التذكير بمفهوم الاشتقاق و تطبيقاته من خلال أنشطة متنوعة تبرز أهمية التي يكتسبها في الدراسة الموضوعية و الشاملة للدوال المقررة و خاصة في التقريب المحلي لدالة وفي دراسة منحى تغيرات دالة على مجال و تحديد المطاريف ودراسة إشارة دالة أو متفاوتة جبرية على مجال ... • تتم صيانة مكتسبات التلاميذ حول الاشتقاق و النهايات من خلال دراسة أمثلة لدوال حدودية و دوال جذرية و دوال لاجذرية و دوال مثلثية
الوسائل اليداكتيكية	سلسلة أنشطة - سلسلة تمارين - الكتاب المدرسي - ملخص المكتسبات السابقة ؛

1 أنشطة الدرس

نشاط 1

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمبايلي : $f(x) = x^2 - 4$

1 أحسب النهايتين $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2}$ و $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h-1) - f(-1)}{h}$ ثم استنتج أن f قابلة للاشتقاق في 2 و -1

2 حدد $f'(2)$ و $f'(-1)$ 3 اعط معادلة مماس منحنى الدالة f في النقطة 2

نشاط 2

لتكن f الدالة العددية المعرفة بمبايلي :
$$\begin{cases} f(x) = 2x + 1 & ; x \geq 1 \\ f(x) = 3x^2 & ; x < 1 \end{cases}$$

1 أدرس قابلية اشتقاق f على اليسار وعلى اليمين في 1 ؛ ثم أول النتيجتين المحصل عليهما مبيانيا

2 هل الدالة f قابلة للاشتقاق في 1 ؟

3 حدد تعبير معادلي المماسين (T_d) و (T_g) حيث $(T_d) : y = f'_d(1)(x - 1) + f(1)$ و $(T_g) : y = f'_g(1)(x - 1) + f(1)$

4 أنشئ $(\mathcal{C}_f)$ و (T_d) و (T_g) و النقطة $M(1, f(1))$ في نفس المعلم المتعامد المنظم $(O; \vec{i}, \vec{j})$

نشاط 3

في كل حالة من الحالات التالية ادرس قابلية الدالة f على المجال I ، ثم حدد دالتها المشتقة f'

1 $I =]0, +\infty[$ ؛ $f(x) = x + \sqrt{x}$ 3 $I =]2, +\infty[$ ؛ $f(x) = \frac{1}{x^3 - 8}$

2 $I = \mathbb{R}$ ؛ $f(x) = (x + 2)(x - 1)$ 4 $I = \mathbb{R}$ ؛ $f(x) = \frac{x + 1}{x^2 + 3}$

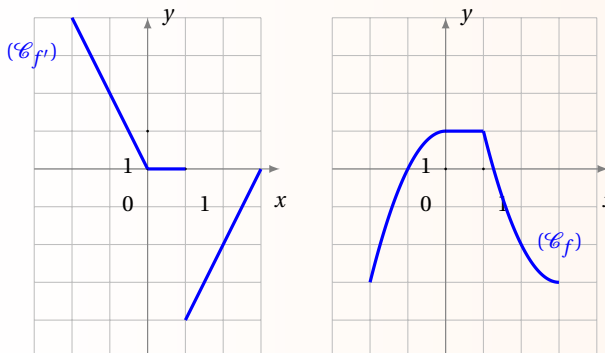
نشاط 4

يمثل الشكلان $(\mathcal{C}_f)$ و $(\mathcal{C}_{f'})$ جانبه على التوالي منحنى دالة f و دالتها المشتقة f'

1 أتمم ملء الجدول التالي :

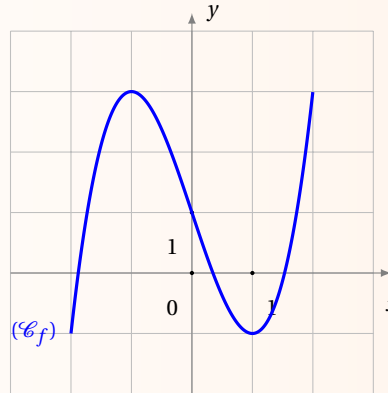
المجال	إشارة الدالة المشتقة f'	تغيرات الدالة f
$I =]-2, 0[$		
$J =]0, 1[$		
$K =]1, 3[$		

2 ذكر بالخاصية التي تربط إشارة الدالة f' بتغيرات الدالة f



نشاط 5

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}$ بتمثيلها المبياني أسفله .



- 1 ماذا تمثل النقطتان $A(1, f(1))$ و $B(-1, f(-1))$ بالنسبة للدالة f ؟
- 2 حدد $f(1)$ و $f(-1)$ و $f'(1)$ و $f'(-1)$
- 3 حدد معادلتين مماسي منحنى الدالة f وانشأهما في نفس الشكل . ماذا تلاحظ ؟

نشاط 6

نعتبر الدوال f و g و h المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بمائلي : $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$ و $g(x) = \frac{1}{1+x}$ و $h(x) = \sqrt{x}$

- 1 تحقق أن : $f = g \circ h$
- 2 أحسب مشتقات الدوال f و g و h
- 3 قارن $f'(x)$ و $g'[h(x)] \cdot h'(x)$ بالنسبة لـ $x \in]0, +\infty[$

نشاط 7

نعتبر الدالة f المعرفة على $]0, +\infty[$ بـ : $f(x) = x^2 - 1$

- 1 بين أن f تقابل من $]0, +\infty[$ نحو مجال I يجب تحديده
- 2 تحقق أن : $f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$ ($\forall x \in I$)
- 3 بين أن f^{-1} قابلة للاشتقاق على $]-1, +\infty[$ وأحسب $(f^{-1})'(x)$
- 4 تحقق أن : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ ($\forall x \in]-1, +\infty[$)

2 تذكير وإضافات

1.2 اشتقاق دالة في نقطة

تعريف

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$

- نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وجد عدد حقيقي l بحيث : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = l$
- العدد l يسمى العدد المشتق للدالة f في a ونرمز له ب $f'(a)$ ونكتب : $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$ أو $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$
- إذا كانت الدالة f قابلة للاشتقاق في a فإن الدالة : $x \mapsto f'(a)(x-a) + f(a)$ الدالة التآلفية المماسية للدالة f في النقطة a (أو التقريب التآلفي للدالة f بجوار a)
- معادلة المماس للدالة f في النقطة a هي : $y = f'(a)(x-a) + f(a)$

تطبيقي تمرين

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f في x_0 في كل حالة من الحالات التالية :

1 $x_0 = 1$ ؛ $f(x) = 3x^2 + x$

2 $x_0 = -1$ ؛ $f(x) = x^3 + 2x$

3 $x_0 = 1$ ؛ $f(x) = x + |x+1|$

تطبيقي تمرين

باستعمال مفهوم العدد المشتق أحسب النهايتين التاليتين :

1 $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{3}} \frac{\cos(x) - \frac{1}{2}}{x - \frac{\pi}{3}}$

2 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1+x-x^2)^{2015} - 1}{x-1}$

3 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{x}$

4 $(a > 0) \lim_{x \rightarrow a} \frac{x\sqrt{x} - a\sqrt{a}}{x^3 - a^3}$

تطبيقي تمرين

لتكن f الدالة العددية المعرفة ب : $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$

1 بين أن f قابلة للاشتقاق في النقطة 0

2 حدد التقريب التالفي للدالة f بجوار 0

3 اعط قيمة مقربة للعددين $\sqrt[3]{1.0035}$ و $\sqrt[3]{0.997}$

2.2 الاشتقاق على اليمين - الاشتقاق على اليسار

تعريف

...

• لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $[a, a+\alpha[$ ($\alpha > 0$). نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليمين في a إذا وجد

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

عدد حقيقي l بحيث : $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$ ونكتب : $f'_d(a)$ ونرمز له ب $f'_d(a)$ أو

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_d(a)$$

• لتكن f دالة عددية معرفة على مجال من نوع $]a-\alpha, a]$ ($\alpha > 0$). نقول إن f قابلة للاشتقاق على اليسار في a إذا وجد

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = l$$

عدد حقيقي l بحيث : $\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$ ونكتب : $f'_g(a)$ ونرمز له ب $f'_g(a)$ أو

$$\lim_{x \rightarrow a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'_g(a)$$

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$.

نقول إن f قابلة للاشتقاق في a إذا وفقط إذا كانت قابلة للاشتقاق على اليمين و على اليسار في a و $f'_g(a) = f'_d(a)$

تطبيقي تمرين

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f (على اليمين أو اليسار) في x_0 في كل حالة من الحالات التالية :

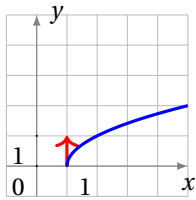
1 $f(x) = x\sqrt{x}$ ؛ على اليمين في $x_0 = 0$

2 $f(x) = x + \sqrt{x-2}$ ؛ على اليمين في $x_0 = 2$

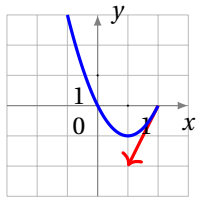
3 $f(x) = |x^2 - x|$ ؛ على اليسار في $x_0 = 1$

3.2 قابلية الاشتقاق و التاويل الهندسي

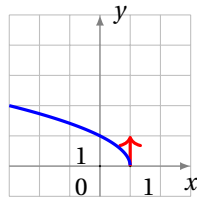
النهاية	استنتاج	التاويل الهندسي للمنحنى : $(\mathcal{C}_f)$ يقبل ...
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \neq 0$	f قابلة للاشتقاق في x_0	1 مماسا في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ معامل الموجه هو a
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		2 مماسا أفقيا في النقطة $A(x_0, f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \neq 0$	f قابلة للاشتقاق على يمين x_0	3 نصف مماس على اليمين في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ معامل الموجه هو a
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		4 نصف مماس أفقي على اليمين في النقطة $A(x_0, f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يمين x_0	5 نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ موجه نحو الأسفل
$\lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		6 نصف مماس عمودي على اليمين في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = a \neq 0$	f قابلة للاشتقاق على يسار x_0	7 نصف مماس على اليسار في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ معامل الموجه هو a
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = 0$		8 نصف مماس أفقي على اليسار في النقطة $A(x_0, f(x_0))$
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty$	f غير قابلة للاشتقاق على يسار x_0	9 نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ موجه نحو الأعلى
$\lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$		10 نصف مماس عمودي على اليسار في النقطة $A(x_0, f(x_0))$ موجه نحو الأسفل



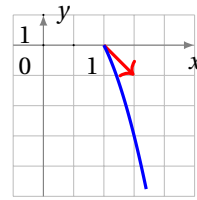
الشكل 9



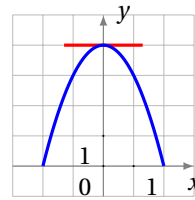
الشكل 7



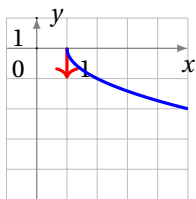
الشكل 5



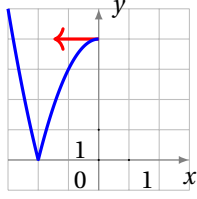
الشكل 3



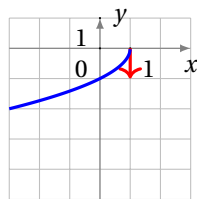
الشكل 1



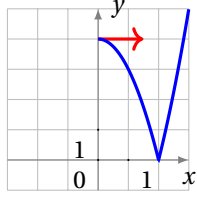
الشكل 10



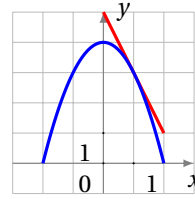
الشكل 8



الشكل 6



الشكل 4



الشكل 2

4.2 الاشتقاق على مجال - الدالة المشتقة

تعريف

...

- نقول إن f قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من I .
- نقول إن f قابلة للاشتقاق على المجال المغلق $[a, b]$ إذا كانت قابلة للاشتقاق في كل نقطة من المجال المفتوح $]a, b[$ وقابلة للاشتقاق على اليمين في a وقابلة للاشتقاق على اليسار في b .
- الدالة المعرفة بـ $x \mapsto f'(x)$ تسمى الدالة المشتقة للدالة f ويرمز لها بالرمز f' .
- إذا كانت f' قابلة للاشتقاق على I فإن دالتها المشتقة تسمى الدالة المشتقة الثانية للدالة f ونرمز لها بالرمز f'' .

5.2 الدالة المشتقة لبعض الدوال الاعتيادية - العمليات على الدوال المشتقة

الجدول التالي يلخص مشتقات بعض الدوال الاعتيادية :

الدالة f	D_f مجموعة تعريف f	الدالة المشتقة f'	$D_{f'}$ مجموعة تعريف f'
$f(x) = a$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = 1$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n; (n \in \mathbb{N}^* - \{1\})$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = x^n; (n \in \mathbb{Z}^* - \{1\})$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$D_f =]0, +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$D_{f'} =]0, +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$D_f = \mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R}^*$
$f(x) = \sin(x)$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(x)$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \tan(x)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$
$f(x) = \sqrt{g(x)}$	$x \in D_g / g(x) \geq 0$	$f'(x) = \frac{g'(x)}{2\sqrt{g(x)}}$	$x \in D_g / g(x) > 0$
$f(x) = \sin(ax + b)$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = a \cos(ax + b)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \cos(ax + b)$	$D_f = \mathbb{R}$	$f'(x) = -a \sin(ax + b)$	$D_{f'} = \mathbb{R}$
$f(x) = \tan(ax + b)$	$ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$	$f'(x) = a \left(1 + \tan^2(ax + b) \right)$	$ax + b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi; (k \in \mathbb{Z})$
$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$	$D_f = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}; c \neq 0$	$f'(x) = \frac{\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}}{(cx + d)^2}$	$D_{f'} = \mathbb{R} - \left\{ -\frac{d}{c} \right\}; c \neq 0$

خاصية

العمليات على الدوال المشتقة

...

- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و $\lambda \in \mathbb{R}$ فإن : الدوال $f+g$ و fg و λf دوال قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $(f+g)' = f' + g'$ و $(fg)' = f'g + fg'$ و $(\lambda f)' = \lambda f'$
- إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق على مجال I و g لا تنعدم على I فإن : الدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ قابلتان للاشتقاق على I ولدينا : $\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2}$ و $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$

خواص

...

- 1 كل دالة حدودية قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$
- 2 كل دالة جذرية قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها
- 3 الدالتين $x \mapsto \cos(x)$ و $x \mapsto \sin(x)$ قابلتان للاشتقاق على $\mathbb{R}$
- 4 الدالة $x \mapsto \tan(x)$ قابلة للاشتقاق على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$
- 5 الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$

تطبيقي تمرين

أدرس قابلية اشتقاق الدالة f ثم حدد دالتها المشتقة في الحالات التالية :

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2x} \quad 3$$

$$f(x) = x^2 + \cos(x) \quad 4$$

$$f(x) = (-7x + x^2 + 3)^5 \quad 1$$

$$f(x) = \frac{1}{3x^2} - \frac{1}{x} + 3x \quad 2$$

6.2 رتبة دالة وإشارة مشتقتها

خاصية

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I
- إذا كانت f' موجبة (قطعا) على I فإن الدالة f تزايدية (قطعا) على I
- إذا كانت f' سالبة (قطعا) على I فإن الدالة f سالبة (قطعا) على I
- إذا كانت f' منعدمة على I فإن الدالة f ثابتة على I

7.2 مطارف دالة قابلة للاشتقاق

خاصية

- لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال مفتوح I و x_0 عنصرا من I
- إذا كانت f' قابلة للاشتقاق في x_0 وتقبل مطراف في النقطة x_0 فإن $f'(x_0) = 0$
 - إذا كانت f' تنعدم في x_0 و تغير اشارتها فإن $f(x_0)$ مطراف للدالة f

تطبيقي تمرين

أدرس رتبة الدالة f ومطرافها إذا وجدت في الحالات التالية :

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x-1} \quad \boxed{4}$$

$$f(x) = x + \sqrt[3]{x^2-1} \quad \boxed{5}$$

$$f(x) = \sqrt[3]{x^3-3x+2} \quad \boxed{6}$$

$$f(x) = x^2 + 2x - 1 \quad \boxed{1}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 2x + 1} \quad \boxed{2}$$

$$f(x) = (2x-3)\sqrt{x} \quad \boxed{3}$$

8.2 الاتصال والاشتقاق

خاصية

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح I و $a \in I$ ؛ إذا كانت f قابلة للاشتقاق في a فإن f متصلة في a .

ملاحظة

عكس هذه الخاصية غير صحيح
مثال مضاد : لتكن f الدالة العددية المعرفة على $\mathbb{R}$ ب : $f(x) = |x|$
لدينا f متصلة في 0 لكن f غير قابلة للاشتقاق في 0 لأن $f'_d(0) \neq f'_g(0)$

نتيجة

إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I فإن f متصلة على I

3 مشتقة مركب دالتين

خاصية

- لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة معرفة على مجال J بحيث $f(I) \subset J$
- إذا كان a عنصرا من المجال I بحيث f قابلة للاشتقاق في a و g قابلة للاشتقاق في $f(a)$ فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق في a ولدينا : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x)$
 - إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I و g قابلة للاشتقاق على $f(I)$ فإن الدالة $g \circ f$ قابلة للاشتقاق على I ولدينا : $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \times f'(x) \quad (\forall x \in I)$

نتيجة

لتكن f دالة قابلة للاشتقاق على مجال I

- $(\sqrt{f(x)})' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \quad (f \geq 0 \text{ على } I)$
- $(f^n(x))' = n f'(x) f^{n-1}(x) \quad (n \in \mathbb{N}^*)$

مثال

لنحسب f' و g' مشتقتي الدالتين : $f(x) = \sin(x^2 - 4x + 1)$ و $g(x) = \tan(\sqrt{x})$

$$\begin{aligned} g'(x) &= (\tan(\sqrt{x}))' \\ &= (\sqrt{x})' \times \tan'(\sqrt{x}) \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (1 + \tan^2(\sqrt{x})) \end{aligned}$$

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (1 + \tan^2(\sqrt{x}))$$

لدينا :

$$\begin{aligned} f'(x) &= (\sin(x^2 - 4x + 1))' \\ &= (x^2 - 4x + 1)' \times \sin'(x^2 - 4x + 1) \\ &= (2x - 4) \times \cos(x^2 - 4x + 1) \end{aligned}$$

$$f'(x) = (2x - 4) \times \cos(x^2 - 4x + 1)$$

4 مشتقة الدالة العكسية

خاصية

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال I .

- إذا كان a عنصراً من المجال I بحيث f قابلة للاشتقاق في a و $f'(a) \neq 0$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق في $f(a)$ ولدينا : $(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}$
- إذا كانت f قابلة للاشتقاق على مجال I بحيث دالتها المشتقة لا تنعدم في $f(I)$ فإن الدالة العكسية f^{-1} قابلة للاشتقاق على المجال $f(I)$ ولدينا : $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ ($\forall x \in f(I)$)

تطبيقي تمرين

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على $[1, +\infty[$ ب : $f(x) = x^2 - 2x + 3$

1 بين أن f تقبل دالة عكسية على مجال I يجب تحديده نحو $[1, +\infty[$

2 حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من I

3 أحسب $f(2)$ و استنتج $(f^{-1})'(3)$

نتائج

لتكن f دالة موجبة قطعاً و قابلة للاشتقاق على مجال I و $n \in \mathbb{N}^*$ و $r \in \mathbb{Q}^*$ حسب الخاصية السابقة نستنتج مايلي :

الدالة	مجال قابلية الاشتقاق	الدالة المشتقة
$f(x) = \sqrt[n]{x}$	f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$	$f'(x) = \left(x^{\frac{1}{n}}\right)' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$
$f(x) = x^r$	f قابلة للاشتقاق على $]0, +\infty[$	$f'(x) = (x^r)' = r x^{r-1}$
$g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$	g قابلة للاشتقاق على I	$g'(x) = \frac{1}{n} \times f'(x) \times (f(x))^{\frac{1}{n}-1}$
$g(x) = (f(x))^r$	g قابلة للاشتقاق على I	$g'(x) = \left((f(x))^r\right)' = r \times f'(x) \times (f(x))^{r-1}$