

تصحيح التمرين 1:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} ; x \neq 0 \\ f(0) = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1)$$

لندرس اتصال الدالة f في 0 :

لدينا : $f(0) = \frac{1}{2}$. لنحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+1)-1}{x(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt{x+1}+1)} = \frac{1}{2}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ فإن f متصلة في 0

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} ; x \neq 2 \\ f(2) = -\frac{1}{3} \end{cases} \quad (2)$$

لندرس اتصال f في 2 :

لدينا : $f(2) = -\frac{1}{3}$. لنحسب $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-5x+6}{x^2-x-2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-3)}{(x-2)(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-3}{x+1} = \frac{-1}{3}$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$ فإن f متصلة في 2

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} ; x \neq 0 \\ f(0) = 2 \end{cases} \quad (3)$$

لندرس اتصال الدالة f في 0 :

لدينا : $f(0) = 2$. لنحسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sqrt{x+1}-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1}-1)(\sqrt{x+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(\sqrt{x+1})^2 - 1^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x \cdot (\sqrt{x+1}+1)}{(x+1)-1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot (\sqrt{x+1}+1) = 1 \times 2 = 2$$

بما أن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$ فإن f متصلة في 0

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 2x - 3; x \geq -2 \\ f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x + 2}; x < -2 \end{cases} \quad (4)$$

لندرس اتصال الدالة f في -2 :

$$f(-2) = (-2)^2 + 2(-2) - 3 = -3$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} x^2 + 2x - 3 = -3$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{x^2 + x - 2}{x + 2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \frac{(x+2)(x-1)}{x+2} = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} x - 1 = -3$$

بما أن $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = f(-2)$ فإن f متصلة في -2

$$\text{لنحدد قيمة } m \text{ لكي تكون } f \text{ متصلة في } 0. \quad \begin{cases} f(x) = 2 \frac{\sin(3x)}{x} + 1 & ; x > 0 \\ f(x) = x + m - \frac{1}{2} & ; x \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

$$f(0) = (0) + m - \frac{1}{2} = m - \frac{1}{2} \quad \text{لدينا}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x + m - \frac{1}{2} = m - \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \frac{\sin(3x)}{x} + 1 = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \times 3 \times \frac{\sin(3x)}{3x} + 1 = 2 \times 3 \times 1 + 1 = 6 + 1 = 7$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = f(0) \quad \text{تعني } 0 \text{ متصلة في } 0$$

$$7 = m - \frac{1}{2} \quad \text{أي } m = 7 + \frac{1}{2} \quad \text{أي } m = \frac{15}{2}$$

$$(6) \quad \begin{cases} g(x) = x - k & ; x < 0 \\ g(0) = 2 \\ g(x) = 1 + \frac{\tan x}{x} & ; x > 0 \end{cases} . \text{ لنحدد قيمة } k \text{ لكي تكون } g \text{ متصلة في } 0.$$

$$\text{لدينا } g(0) = 2$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x - k = -k$$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 1 + \frac{\tan(x)}{x} = 1 + 1 = 2$$

$$g \text{ متصلة في } 0 \text{ تعني } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} g(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} g(x) = g(0)$$

$$\text{تعني } -k = 2 \text{ أي } k = -2$$

تصحيح التمرين 2:

$$1. \text{ لدينا : } \begin{cases} f(x) = \frac{x^3 - 8}{x - 2} & ; x \neq 2 \\ f(2) = 12 \end{cases}$$

$$\text{لنحدد } D_f = (\{x \in \mathbb{R} / x - 2 \neq 0\}) \cup \{2\} = (\{x \in \mathbb{R} / x \neq 2\}) \cup \{2\} = (\mathbb{R} / \{2\}) \cup \{2\} = \mathbb{R} : D_f$$

• الدالة f متصلة على $\mathbb{R} / \{2\}$ (لأن f دالة جذرية)

• لندرس اتصال f في 2 : لدينا $f(2) = 12$

$$\text{لنحسب } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) :$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2^3}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x^2 + 2x + 2^2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} x^2 + 2x + 4 = 12$$

$$\text{بما أن } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2) \text{ فإن } f \text{ متصلة في } 2.$$

خلاصة: الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$.

$$2. \text{ لدينا : } f(x) = x^5 - 6x^2 + 3x + 7$$

الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ (لأنها دالة حدودية)

$$3. \text{ لدينا : } f(x) = 2 \sin x + 3 \cos x$$

$$f_1 : x \mapsto 2 \sin x \text{ متصلة على } \mathbb{R}$$

$f_2 : x \mapsto 3\cos x$ متصلة على $\mathbb{R}$
إذن $f = f_1 + f_2$ متصلة على $\mathbb{R}$ (كمجموع لدالتين متصلتين على $\mathbb{R}$)

4. لدينا : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$

لنحدد D_f : لنحدد $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 1 \geq 0\}$

إذن : $D_f =]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
x^2-1	+		-	+

نضع $f_1 : x \mapsto x^2 - 1$

لدينا : الدالة f_1 متصلة على $\mathbb{R}$ بالخصوص على D_f و $f_1(x) \geq 0$ و $(\forall x \in D_f)$

إذن الدالة $f = \sqrt{f_1}$ متصلة على D_f .

5. لدينا : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1}$. لنحدد D_f : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 + 1 \neq 0, x \geq 0\} = \mathbb{R}^+$

$f_1 : x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

$f_2 : x \mapsto x^2 + 1$ متصلة على $\mathbb{R}$ بالخصوص على $\mathbb{R}^+$ و $f_2(x) \neq 0$ و $(\forall x \in \mathbb{R}^+)$

إذن $f = \frac{f_1}{f_2}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$ (كخارج دالتين متصلتين على $\mathbb{R}^+$)

6. لدينا : $f(x) = (x^2 - 3x + 4) \times \cos x$

$D_f = \mathbb{R}$

$f_1 : x \mapsto x^2 - 3x + 4$ متصلة على $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto \cos x$ متصلة على $\mathbb{R}$

إذن $f = f_1 \times f_2$ متصلة على $\mathbb{R}$ كجاء دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

7. لدينا : $f(x) = \frac{x^2 + x - 1}{x^2 + 1} + \sqrt{x^2 - x + 4}$

$D_f = \mathbb{R}$

$f_1 : x \mapsto x^2 + x - 1$ متصلة على $\mathbb{R}$

$f_2 : x \mapsto x^2 + 1$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $f_2(x) \neq 0$ و $(\forall x \in \mathbb{R})$

• إذن $h = \frac{f_1}{f_2}$ متصلة على $\mathbb{R}$

$(\forall x \in \mathbb{R}) f_3(x) \geq 0$ و $f_3: x \mapsto x^2 - x + 4$ متصلة على $\mathbb{R}$
 • إذن $k = \sqrt{f_3}$ متصلة على $\mathbb{R}$
 ❖ وبالتالي : $f = h + k$ متصلة على $\mathbb{R}$ كمجموع دالتين متصلتين على $\mathbb{R}$

تصحيح التمرين 3:

1. لنبين أن المعادلة $(E): x^5 - x^3 + 5x - 4 = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[0,1]$

نعتبر الدالة $f: x \mapsto x^5 - x^3 + 5x - 4$

✓ الدالة f متصلة على المجال $[0,1]$

$$\begin{cases} f(0) = -4 \\ f(1) = 1 \end{cases} \Rightarrow f(0) \times f(1) < 0 \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[0,1]$

2. لنبين أن المعادلة $(E): 2\sin x = x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $I = \left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

$$(2\sin x = x \Leftrightarrow 2\sin x - x = 0)$$

نعتبر الدالة $f: x \mapsto 2\sin x - x$

✓ الدالة f متصلة على المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

$$\begin{cases} f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3} - \frac{\pi}{3} = \frac{3\sqrt{3} - \pi}{3} > 0 \\ f(\pi) = -\pi < 0 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{3}\right) \times f(\pi) < 0 \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

و منه المعادلة (E) تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

تصحيح التمرين 4 :

لنبين أن المعادلة $x^3 + 2x - 4 = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

نعتبر الدالة $f: x \mapsto x^3 + 2x - 4$

✓ الدالة f متصلة على المجال $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

✓ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

$$f'(x) = (x^3 + 2x - 4)' = 3x^2 + 2 \quad \text{ليكن } x \in \left[1, \frac{3}{2}\right]$$

$$\text{إذن : } \left(\forall x \in \left[1, \frac{3}{2}\right] \right) f'(x) > 0$$

إذن الدالة f تزايدية قطعاً على $\left[1, \frac{3}{2}\right]$

$$\begin{cases} f(1) = -1 \\ f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{19}{8} \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{f(1) \times f\left(\frac{3}{2}\right) < 0}} \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة بالوحدانية المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً في المجال

$$\left[1, \frac{3}{2}\right]$$

تصحيح التمرين 5:

لنبين أن المعادلة $2x^3 + 7x - 4 = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $\mathbb{R}$ وأن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

أولاً : لنبين أن المعادلة $2x^3 + 7x - 4 = 0$ تقبل حلاً وحيداً α في المجال $\mathbb{R}$

نضع : $f : x \mapsto 2x^3 + 7x - 4$

✓ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$

✓ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$

$$\text{ليكن } x \in \mathbb{R} : f'(x) = (2x^3 + 7x - 4)' = 6x^2 + 7$$

$$\text{إذن : } (\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) > 0$$

إذن الدالة f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$

$$\checkmark \text{ لنحسب } f(\mathbb{R}) = f(]-\infty, +\infty[) = \left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$

$$\underline{\underline{0 \in f(\mathbb{R})}} \quad \text{إذن}$$

و بالتالي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\mathbb{R}$

ثانيا : لنبين أن $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

✓ الدالة f متصلة على $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$

$$\begin{cases} f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{-1}{4} \\ f(1) = 5 \end{cases} \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) \times f(1) < 0 \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$

تصحيح التمرين 6:

نعتبر الدالة g المعرفة على $[a, b]$ بما يلي : $g(x) = f(x) - bx$

الدالة g متصلة على $[a, b]$ (كمجموع دالتين متصلتين على $[a, b]$: حسب المعطيات f دالة عددية متصلة

على مجال $[a, b]$ و $x \mapsto -bx$ متصلة على $\mathbb{R}$ بالخصوص على $[a, b]$)

لدينا $g(a) = f(a) - ba$ و بما أن $f(a) < ab$ فإن $f(a) - ab < 0$ و منه $g(a) < 0$

لدينا $g(b) = f(b) - b^2$ و بما أن $f(b) > b^2$ فإن $f(b) - b^2 > 0$ و منه $g(b) > 0$

إذن $g(a) \times g(b) < 0$

و بالتالي حسب مبرهنة القيم الوسيطة : يوجد c من $[a, b]$ بحيث $g(c) = 0$

و منه يوجد c من $[a, b]$ بحيث $f(c) - bc = 0$

أي يوجد c من $[a, b]$ بحيث $f(c) = bc$

تصحيح التمرين 7:

1. نضع $f : x \mapsto 2x^3 + x - 1$

أولا : لنبين أن المعادلة $2x^3 + x - 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\mathbb{R}$

✓ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$

✓ الدالة f قابلة للاشتقاق على المجال $\mathbb{R}$

ليكن $x \in \mathbb{R} : f'(x) = (2x^3 + x - 1)' = 6x^2 + 1$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) > 0$

إذن الدالة f تزايدية قطعا على $\mathbb{R}$

✓ لنحسب $f(\mathbb{R})$: $f(\mathbb{R}) = f([- \infty, +\infty]) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [- \infty, +\infty] = \mathbb{R}$ إذن $0 \in f(\mathbb{R})$
و بالتالي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $\mathbb{R}$

ثانيا : لنبين أن $0 < \alpha < 1$

✓ الدالة f متصلة على $[0, 1]$

$$\begin{cases} f(0) = -1 \\ f(1) = 2 \end{cases} \Rightarrow \underline{f(0) \times f(1) < 0} \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : $0 < \alpha < 1$

2. لندرس إشارة الدالة f :

الحالة 1: إذا كان $x \leq \alpha$

لدينا الدالة f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ إذن $f(x) \leq f(\alpha)$ و منه $f(x) \leq 0$

(α حل للمعادلة $f(x) = 0$ إذن $f(\alpha) = 0$)

الحالة 2: إذا كان $x \geq \alpha$

لدينا الدالة f تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$ إذن $f(x) \geq f(\alpha)$ و منه $f(x) \geq 0$

تصحيح التمرين 8:

1. لدينا $g(0) = \sin(0) + 2\cos(0) = (0) + 2 \times (1) = 2$ إذن $g(0) > 0$

لدينا $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = (1) + 2 \times (0) = 1$ إذن $g\left(\frac{\pi}{2}\right) < 1$

2. لنبين أن المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

نعتبر الدالة h المعرفة على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ بما يلي : $h(x) = g(x) - x$

✓ الدالة h متصلة على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ (كمجموع دالتين متصلتين على $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$)

$$\begin{cases} h(0) = g(0) > 0 \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) = g\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} < 1 - \frac{\pi}{2} < 0 \end{cases} \Rightarrow h(0) \times h\left(\frac{\pi}{2}\right) < 0 \quad \checkmark$$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : المعادلة $h(x) = 0$ تقبل حلاً على الأقل في المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

و منه المعادلة $g(x) = x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

تصحيح التمرين 9:

$$\begin{aligned} f(-1) &= 4(-1)^3 - 3(-1) - \frac{1}{2} = -4 + 3 - \frac{1}{2} = -\frac{3}{2} \quad (1) \\ f\left(\frac{-1}{2}\right) &= 4\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{-1}{2}\right) - \frac{1}{2} = 4\left(\frac{-1}{8}\right) + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{-1}{2} + \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ f(0) &= 4(0)^3 - 3(0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \\ f(1) &= 4(1)^3 - 3(1) - \frac{1}{2} = 4 - 3 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned} \quad (2)$$

➤ الدالة f متصلة على $\left[-1, -\frac{1}{2}\right]$ و $f(-1) \times f\left(\frac{-1}{2}\right) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة المعادلة

$$f(x) = 0 \text{ تقبل حلا على الأقل في } \left[-1, -\frac{1}{2}\right]$$

➤ الدالة f متصلة على $\left[-\frac{1}{2}, 0\right]$ و $f\left(\frac{-1}{2}\right) \times f(0) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة المعادلة

$$f(x) = 0 \text{ تقبل حلا على الأقل في } \left[-\frac{1}{2}, 0\right]$$

➤ الدالة f متصلة على $[0, 1]$ و $f(0) \times f(1) < 0$ إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة المعادلة $f(x) = 0$

تقبل حلا على الأقل في $[0, 1]$

❖ خلاصة: المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل ثلاثة حلول في المجال $[-1; 1]$

تصحيح التمرين 10:

نعتبر الدالة g المعرفة على $[a, b]$ بما يلي: $g(x) = f(x) - x$

✓ الدالة g متصلة على $[a, b]$ (كمجموع دالتين متصلتين على $[a, b]$)

✓ بما أن f دالة معرفة من $[a, b]$ نحو $[a, b]$ فإن $f(a) \in [a, b]$ و $f(b) \in [a, b]$

و منه $a \leq f(a)$ و $f(b) \leq b$ أي $f(a) - a \geq 0$ و $f(b) - b \leq 0$ إذن $g(a) \geq 0$ و $g(b) \leq 0$

و بالتالي: $g(a) \times g(b) \leq 0$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطة : المعادلة $g(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a; b]$
و بالتالي : المعادلة $f(x) = x$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a; b]$.

つづく