

تمرين 1

أحسب النهايات التالية :

$$\begin{aligned} & \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 1} + 3x) \quad (2) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} (\sqrt{9x^2 + x + 1} - 2x) \quad (1) \\ & \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{1 - 2x^3} - \sqrt{-x^3 + x + 1}) \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 - \sqrt{x + 2}) \quad (3) \\ & \lim_{x \rightarrow -2^-} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x + 2} \quad (9) \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 4}}{x - 2} \quad (8) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{1 - 3x} - 2}{x + 1} \quad (7) \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + 1 + \sqrt{-x + 1}}{x^2 - \sqrt{x^2 + 2}} \quad (6) \quad \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 + x - 1}}{x^2 - \sqrt{x^4 - 1}} \quad (5) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + \sqrt{x}}{\sqrt{x^2 + x} - x} \quad (12) \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{2 + x} + \sqrt{3 - x} - 3}{x + 1} \quad (11) \quad \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{x^2 - x - 6 + \sqrt{3x - x^2}}{x + 3} \quad (10) \\ & \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{3} \cos x - \sin x - \sqrt{3}} \quad (13) \\ & \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan x - 1}{2 \cos x - \sqrt{2}} \quad (15) \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{6}} \frac{\cos x - \sqrt{3} \sin x}{6x - \pi} \quad (14) \end{aligned}$$

تمرين 2

$$f(x) = \begin{cases} (x-1) \sin\left(\frac{1}{x-1}\right) & ; x < 1 \\ x^2 - 2x - 8 & ; x \geq 1 \end{cases} \quad \text{نعتبر الدالة}$$

(1) حدد D_f وادرس اتصال f عند $x_0 = 1$ (2) احسب $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} f(x)$

(3) هل الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في النقطة 4

تمرين 3

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + 2x - a}{x - 2} & ; x > 2 \\ \frac{2x^2 + b - a}{x} & ; x \leq 2 \end{cases} \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة بمايلي}$$

حدد العددين a و b بحيث تكون الدالة f متصلة في النقطة 2

تمرين 4

$$f(x) = \frac{x^3 - 4x^2 + 4x}{x^2 - 4} \quad \text{نعتبر الدالة}$$

(1) حدد D_f وأحسب النهايات عند محداث D_f
(2) هل الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في كل من 2 و -2 ؟

تمرين 5

$$f(x) = \frac{\sqrt{1 + \sin^2 x} - 1}{x^2} \quad \text{نعتبر الدالة}$$

(1) حدد D_f
(2) بين أن الدالة f تقبل تمديدا بالاتصال في 0 .

تمرين 6

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{3} \cos x - \sin x}{2 \cos x - 1} & ; x \neq \frac{\pi}{3} \\ f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{\sqrt{3}} \end{cases} \quad \text{نعتبر الدالة } f \text{ المعرفة بما يلي :}$$

بين أن f متصلة في $\frac{\pi}{3}$.

تمرين 7

$$\begin{cases} f(x) = x \sin\left(\frac{2}{x}\right), x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(1) ادرس اتصال f في 0. (2) احسب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

تمرين 8

(1) بين أن المعادلة $x^5 + x^3 - x^2 + x + 1 = 0$ تقبل على الأقل حلا في $\mathbb{R}$

(2) بين أن المعادلة $3x^7 + 2x^5 + x - 10^6 \sqrt[4]{3} = 0$ تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$

(3) نعتبر الدالة $f(x) = x^4 + x - 1$. بين أن المنحنى C_f يقطع محور الأفاصل في المجال $[0, 1]$

(4) نعتبر الدالتين : $f(x) = \sqrt{x+1}$ و $g(x) = -x^3$

بين أن المنحنيين C_g و C_f يتقاطعان في نقطة وحيدة أفصولها α بحيث : $-\frac{7}{8} < \alpha < -\frac{3}{4}$

تمرين 9

لتكن f دالة متصلة على $[0, 1]$ بحيث $f(0) = 0$ و $f(1) = 1$

بين أن $(\exists c \in]0, 1[): f(c) = \frac{1-c}{1+c}$

تمرين 10

لتكن f دالة متصلة على $[a, b]$ بحيث

$$f(a) < ab \text{ و } f(b) > b^2 \text{ مع } (a < b)$$

بين أنه يوجد عدد حقيقي c من $[a, b]$ بحيث $f(c) = bc$

تمرين 11

لتكن f دالة عددية تحقق $\exists k \in \mathbb{R}_+^*; \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 : |f(x) - f(y)| \leq k \times |x - y|$

بين أن f دالة متصلة على $\mathbb{R}$

تمرين 12

لتكن f دالة متصلة على $[0, 1]$ بحيث $f(1) = f(0) = 0$ و $(\forall x \in [0, 1]): f(x) \geq 0$.

بين أن $(\forall n \in \mathbb{N}^*)(\exists c \in [0, 1]): f(c) = f(c + \frac{1}{n})$

تمرين 13

لتكن f دالة معرفة من $\mathbb{R}^+$ نحو $\mathbb{R}^+$ بحيث : f متصلة على $\mathbb{R}^+$ و $(\forall x \in \mathbb{R}^+): f(x) < x$

(1) بين أن $f(0) = 0$.

(2) بين أن : $(\forall (a, b) \in (\mathbb{R}^{+2}))(\exists M \in [0, 1])(\forall x \in [a, b]): f(x) \leq Mx$

تمرين 14

(1) بين أنه لكل n من $\mathbb{N}^*$ المعادلة $\arccos(x) - x^n = 0$ تقبل حلا وحيدا a_n في المجال $]0, 1[$.

(2) قارن العددين a_n و $\frac{1}{2}$.

(3) بين أنه : $(\forall n \in \mathbb{N}^*): a_{n+1} > a_n$.

تمرين 15

لتكن f دالة عددية متصلة على $[a, b]$ حيث $\forall x \in [a, b]: f(x) > 0$.

أثبت أن $\exists m > 0, f(x) \geq m$

تمرين 16

نعتبر العددين $A = 3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}$ et $B = -3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}$

(1) أحسب $A - B$ و $\sqrt[3]{AB}$

(2) نعتبر العدد $x = \sqrt[3]{3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}} - \sqrt[3]{-3 + \sqrt{9 + \frac{125}{27}}}$

(a) أحسب x^3 بدلالة x . (b) استنتج أن $x = 1$.

تمرين 17

حل في IR المعادلات التالية :

(1) $(2x - 1)^5 = 32$ (2) $(x + 1)^3 = -27$ (3) $x^6 = 6$ (4) $x^4 = -2$ (5) $(\frac{1 - \sqrt[3]{x}}{3 - \sqrt[3]{x}})^3 + 8 = 0$

(6) $\sqrt[3]{1+x} - \sqrt[3]{1-x} = \sqrt[6]{1-x^2}$ (يمكن وضع $t = \sqrt[6]{\frac{1+x}{1-x}}$)

تمرين 18

نعتبر الدالة $f(x) = 2x^2 - 4x + 1$

(1) ادرس تغيرات f وانشئ منحنىها .

(2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [1, +\infty[$

(a) بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يجب تحديده

(b) حدد $g^{-1}(x)$ وارسم $C_{g^{-1}}$

تمرين 19

نعتبر الدالة $f(x) = \frac{4x}{x^2 + 1}$

بين أن f تقابل من $[-1, 1]$ نحو مجال يجب تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$

تمرين 20

نعتبر الدالة $f(x) = \frac{2 + \sqrt{4 - x^2}}{x}$

(1) حدد D_f

(2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I =]0, 2]$

(a) بين أن g تقابل من المجال I نحو مجال J يجب تحديده

(b) حدد $g^{-1}(x)$

تمرين 21

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

$f(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^3$

(1) حدد حيز تعريف الدالة f .

(2) (a) بين أن الدالة f تقابل من المجال $[-1, +\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده

(b) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 22

نعتبر الدالة $f(x) = x - 3\sqrt[3]{x^2} + 3\sqrt[3]{x}$

(1) حدد حيز تعريف الدالة f .

(2) حل في IR^+ المعادلة $f(x) = x$

(3) (a) بين أن $f(x) = (\sqrt[3]{x} - 1)^3 + 1$

(b) بين أن الدالة f تزايدية قطعاً من المجال $[0, +\infty[$

(c) بين أن الدالة f تقابل من المجال $[0, +\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده

(d) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .

تمرين 23

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي

$$f(x) = -x - 3\sqrt[3]{(1-x)^2} + 3\sqrt[3]{1-x} + 1$$

- (1) حدد حيز تعريف الدالة f .
- (2) بين أن f تقابل من $]-\infty, 1]$ نحو مجال يجب تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$.
- (3) حل في $]-\infty, 1]$ المعادلة $f(x) = 1$.

تمرين 24

نعتبر الدالة $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x}}$

- (1) بين أن $(\forall x \in]-1, +\infty[) : f(x) = \sqrt{x+1} - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$
- (b) بين أن f تقابل من $]-1, +\infty[$ نحو مجال J يتم تحديده ثم حدد $f^{-1}(x)$
- (2) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة: $f^{-1}(x) = f(x)$

تمرين 25

نعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \sqrt{(4 - \sqrt[3]{x^2})^3}$

- (1) حدد مجموعة تعريف الدالة $D_f : f$
- (2) ليكن g قصور الدالة f على المجال $I = [0, 8]$
- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$
- (3) حل في $\mathbb{R}$ المعادلة $f(x) = x$.

تمرين 26

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1}}{\sqrt[3]{x}}$

- (1) بين أن f تقابل من $]0, +\infty[$ نحو مجال J يجب تحديده
- (2) بين أن $(\forall x \in \mathbb{R}) : x - \sqrt{x^2 + 4} < 0$
- (3) حدد $f^{-1}(x)$ لكل x من J .
- (4) حل في $]0, +\infty[$ المعادلة $f(x) = \sqrt{5}$

تمرين 27

أحسب النهايات التالية :

- (1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{-x^3 + 2x^2 - x} - \sqrt{2x^2 + 1})$
- (2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 - x + 1} - x)$
- (3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{1 - x^3} + 2x)$
- (4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{8x^3 - 1} - 2x)$
- (5) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{-8x^3 + x^2 + 1} + 2x)$
- (6) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt[3]{-3x^3 - 1} + x \sqrt[3]{3})$
- (7) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} - \sqrt[3]{1 - x}}{\sqrt[4]{-x^3 + 4x + 1} - \sqrt{2 - x}}$
- (8) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + 1} + x}{\sqrt[3]{1 - x} - x^2}$
- (9) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x}$
- (10) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 4}}{x + 2}$
- (11) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\sqrt[3]{(x + 2)^2}}{x + 2}$
- (12) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x^2 - 1} + x^2 + x - 2}{x - 1}$
- (13) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt[3]{(x + 1)^2} + x^2 + x}{x + 1}$

تمرين 28

أثبت المتساويات التالية :

$$\text{Arc tan}(\frac{1}{5}) + \text{Arc tan}(\frac{2}{3}) = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

$$\text{Arc tan} \frac{1}{2} + \text{Arc tan} \frac{1}{5} + \text{Arc tan} \frac{1}{8} = \frac{\pi}{4} \quad (2)$$

$$\text{Arc tan} \frac{1}{3} + \text{Arc tan} \frac{1}{7} - \text{Arc tan} \frac{1}{2} = 0 \quad (3)$$

$$(\forall x > 0) : \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}(\frac{1}{x}) = \frac{\pi}{2} \quad (4)$$

$$(\forall x < 0) : \text{Arc tan}(x) + \text{Arc tan}(\frac{1}{x}) = -\frac{\pi}{2} \quad (5)$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : \cos(\text{Arc tan } x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \quad (6)$$

$$0 \leq \arctan(\frac{1}{5}) \leq \frac{\pi}{8} \quad (\text{لاحظ أن}) \quad 4\arctan \frac{1}{5} - \arctan \frac{1}{239} = \frac{\pi}{4} \quad (7)$$

$$(\forall x > 0) : \text{Arc tan}(x+1) - \text{Arc tan } x = \text{Arc tan}(\frac{1}{x^2+x+1}) \quad (8)$$

تمرين 29

أحسب $\arctan 2 + \arctan 3$

تمرين 30

حل في $\mathbb{R}$ المعادلة :

$$\text{Arc tan}(\frac{x-8}{8}) - \text{Arc tan}(x) = \frac{\pi}{2}$$

تمرين 31

حل في $\mathbb{R}$ المعادلات التالية .

$$\text{Arc tan}(\frac{x^2-1}{x^2}) + \text{Arc tan}(x) = \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad \text{Arc tan } 2x + \text{Arc tan}(3x) = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

تمرين 32

نعتبر في $\mathbb{R}$ المعادلة

$$(E) : \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$$

(1) بين المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا في $\mathbb{R}$ وأن هذا الحل ينتمي إلى $]0,1[$.

(2) حل المعادلة (E) .

تمرين 33

أحسب النهايات لتالية :

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\text{Arc tan } x - \frac{\pi}{6}}{x - \frac{\sqrt{3}}{3}} \quad (2) \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} \quad (1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\text{Arc tan} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{2}}{x} \quad (4) \quad \lim_{x \rightarrow 1} \text{Arc tan}(\frac{x}{x^2-1}) \quad (3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} x (\arctan(\frac{1}{x}) + \frac{\pi}{2}) \quad (6) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} x (\text{Arc tan } x - \frac{\pi}{2}) \quad (5)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (x \arctan(\frac{x+1}{x}) - \frac{\pi}{4} x) \quad (7)$$

تمرين 34

نعتبر الدالة $f(x) = \arctan\left(\frac{x+1}{x}\right)$

(1) حدد D_f .

(2) ليكن g قصور f على $]0, +\infty[$.

(a) بين أن g تقابل من $]0, +\infty[$ نحو مجال يجب تحديده .

(b) حدد $f^{-1}(x)$.

تمرين 35

حل في IR المعدلتين :

$$\text{Arc tan}\left(\frac{x^2-1}{x^2}\right) + \text{Arc tan}(x) = \frac{\pi}{2} \quad (2) \quad \text{Arc tan } 2x + \text{Arc tan}(3x) = \frac{\pi}{4} \quad (1)$$

تمرين 36

نعتبر في IR المعادلة $(E) : \arctan(x-1) + \arctan x + \arctan(x+1) = \frac{\pi}{2}$

(1) بين المعادلة (E) تقبل حلا وحيدا وأن هذا الحل ينتمي إلى $]0,1[$.

(2) حل المعادلة (E) .