

اتصال دالة

2 ع ت

نتيجة :

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ و $f(a) \cdot f(b) < 0$ فإن
المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلا في $]a, b[$.

وإذا كانت f متصلة ورتبية قطعاً على $[a, b]$ فإن الحل يكون وحيداً

6. الدالة العكسية للدالة متصلة ورتبية قطعاً :

إذا كانت f دالة متصلة ورتبية قطعاً على مجال I فإنها تقبل دالة عكسية
معرفة على المجال $J = f(I)$ ولدينا التكافؤ التالي :

$$\begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

خاصية : إذا كانت f دالة متصلة ورتبية قطعاً على I فإن :

. دالتها العكسية f^{-1} متصلة على $f(I)$ ولها نفس تغيرات f

. منحني f و f^{-1} متماثلان في M بالنسبة للمنصف الأول

7. تعريف دالة الجذر من الرتبة n :

ليكن n عدداً صحيحاً طبيعياً غير منعدم .

الدالة العكسية لقصور الدالة $x \rightarrow x^n$ على R^+ يسمى دالة الجذر من
الرتبة n

خصائص :

. الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ معرفة على R^+ وتأخذ قيمها في R^+

. الدالة $x \rightarrow \sqrt[n]{x}$ متصلة وتزايدية قطعاً على R^+ .

$$\begin{cases} y = x^n \\ x \in R^+ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt[n]{y} \\ y \in R^+ \end{cases}$$

$$\forall x \in R^+, (\sqrt[n]{x})^n = x \quad \text{***} \quad \forall x \in R^+, \sqrt[n]{x^n} = x$$

$$(\forall x \in R^+) (\forall y \in R^+) : \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$$

$$(\forall x \in R^+) (\forall y \in R^+) : \sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$$

$$\forall x \geq 0 : \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{m} \sqrt[n]{x^m} \quad \text{****} \quad \sqrt[n]{m} \sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{m \cdot x}$$

$$\forall x \geq 0, \forall y \geq 0 : \sqrt[n]{x} \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$$

$$\forall x \geq 0, \forall y > 0 : \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad (y > 0)$$

+ إذا كانت f متصلة وموجبة على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

8. القوة الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً :

ليكن a عدداً حقيقياً موجباً قطعاً و r عدداً جذرياً غير منعدم

العدد a^r يسمى القوة الجذرية للعدد a ويكتب $a^r = \sqrt[q]{a^p}$ حيث :

$$r = \frac{p}{q} \text{ مع } p \in Z^* \text{ و } q \in N^*$$

خصائص : لكل a و b من R_+^* و r و r' من Q^* لدينا :

$$a^r \cdot a^{r'} = a^{r+r'}, \quad (ab)^r = a^r b^r ; \quad a^{-r} = \frac{1}{a^r}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r} ; \quad \frac{a^r}{a^{r'}} = a^{r-r'} ; \quad (a^r)^{r'} = a^{rr'}$$

1. اتصال دالة :

لتكن f دالة يحتوي حيز تعريفها على مجال مفتوح مركزه x_0

نقول إن f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

2. الاتصال على مجال :

- تكون دالة متصلة على مجال $]a, b[$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة منه

- تكون دالة متصلة على $[a, b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة على $]a, b[$ ، على
اليمين في a وعلى اليسار في b .

خاصيات :

- كل دالة حدودية متصلة على R .

- كل دالة جذرية متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها .

- الدالتان $x \rightarrow \cos x$ و $x \rightarrow \sin x$ متصلتان على R .

- الدالة $x \rightarrow \sqrt{x}$ متصلة على $[0, +\infty[$.

- الدالة $x \rightarrow \tan x$ متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها وهي $D = R - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in Z \right\}$

3. العمليات على الدوال المتصلة :

- إذا كانت f و g دالتين متصلتين في عدد x_0

فإن الدوال $f+g$ و $f \cdot g$ و $\alpha \cdot f$ حيث α عدد حقيقي متصلة في x_0

- وإذا كان $g(x_0) \neq 0$ فإن $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ دالتان متصلتان في x_0

4. اتصال مركبة دالتين :

لتكن f دالة معرفة على مجال I و g دالة متصلة على مجال J حيث

$$f(I) \subset J \text{ و } x_0 \text{ عنصراً من } I$$

إذا كانت f متصلة في x_0 و g متصلة في $f(x_0)$

فإن الدالة $g \circ f$ تكون متصلة في x_0 .

نتيجة : إذا كانت f متصلة وموجبة على مجال مفتوح مركزه x_0

فإن $\sqrt{f}$ دالة متصلة في x_0 .

خاصية :

لتكن f دالة عددية معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و g دالة معرفة

على مجال J بحيث $f(I) \subset J$

إذا كان : $\lim_{x_0} f(x) = l$ و g متصلة في l

فإن : $\lim_{x_0} (g \circ f)(x) = g(l)$



5. مبرهنة القيم الوسيطة :

إذا كانت f دالة متصلة على $[a, b]$ و λ عدداً حقيقياً

محصوراً بين $f(a)$ و $f(b)$ فإنه يوجد على الأقل عدد c

من $[a, b]$ حيث : $f(c) = \lambda$