

ذ. محمد الكيال

النهايات (تذكير)

← نهايات الدوال $x \mapsto \sqrt{x}$ و $(n \in \mathbb{N}^*) x \mapsto x^n$ و مقلوباتها:

$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$	$\lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^n} = 0$
$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^n} = 0$

إذا كان n عددا فرديا فإن:	إذا كان n عددا زوجيا فإن:
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^n} = +\infty$
$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^n} = +\infty$

← نهايات الدوال الحدودية و الدوال الجذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$:

نهاية دالة جذرية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$
هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

نهاية حدودية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$
هي نهاية حدها الأكبر درجة

← نهايات الدوال المثلثية:

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1$	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$
---	---	---

← نهايات الدوال من النوع: $x \mapsto \sqrt{u(x)}$:

$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{u(x)}$	$\lim_{x \rightarrow x_0} u(x)$
$\sqrt{\ell}$	$\ell \geq 0$
$+\infty$	$+\infty$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

← النهايات و الترتيب:

$$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = \ell \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = \ell \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} |f(x) - \ell| \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq V(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} V(x) = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$$

$$\left. \begin{array}{l} u(x) \leq f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$$

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

← العمليات على النهايات:

◆ نهاية مجموع دالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	ℓ	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) + f(x)]$	$\ell + \ell'$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شرح م

◆ نهاية جداء دالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	ℓ'	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} [g(x) \times f(x)]$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شرح م

◆ نهاية خارج دالتين:

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$	ℓ	ℓ	$\ell < 0$		$\ell > 0$		$-\infty$		$+\infty$		0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$	$\ell' \neq 0$	$\pm\infty$	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0^-	0^+	0	$\pm\infty$
$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x)}{f(x)}$	$\frac{\ell}{\ell'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شرح م	شرح م

ملاحظة عامة:

هذه النهايات تبقى صالحة عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

← الانصال في نقطة:

تعريف: ➔

$$f \text{ متصلة في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

➔ الانصال على اليمين – الانصال على اليسار:

$$f \text{ متصلة على اليمين في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \bullet$$

$$f \text{ متصلة على اليسار في } x_0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) \quad \bullet$$

$$f \text{ متصلة في } x_0 \Leftrightarrow f \text{ متصلة على اليمين و على اليسار في } x_0$$

← الانصال على مجال:

تكون f دالة متصلة على مجال مفتوح $]a, b[$ إذا كانت f متصلة في كل عنصر من المجال $]a, b[$

تكون f دالة متصلة على مجال مغلق $[a, b]$ إذا كانت f متصلة على المجال المفتوح $]a, b[$ و متصلة على اليمين في a و متصلة على اليسار في b

← العمليات على الدوال المتصلة:

لتكن f و g دالتين متصلتين على مجال I و k عدد حقيقي

• الدوال $f + g$ و $f \times g$ و kf متصلة على المجال I

• إذا كانت g لا تنعدم على I فإن الدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتين على المجال I

◆ **نماذج:**

• كل دالة حدودية متصلة على $\mathbb{R}$

• كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها

• الدالة $x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على $\mathbb{R}^+$

• الدالتان $x \mapsto \sin x$ و $x \mapsto \cos x$ متصلتان على $\mathbb{R}$

• الدالة $x \mapsto \tan x$ متصلة على مجموعة تعريفها $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

← انصال مركب دالتين:

إذا كانت f دالة متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J بحيث: $f(I) \subset J$

فإن: $g \circ f$ متصلة على المجال I

← صورة مجال بدالة متصلة:

• صورة قطعة بدالة متصلة هي قطعة

• صورة مجال بدالة متصلة هي مجال

◆ **حالات خاصة:** لتكن f دالة متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I

الجدول التالي يوضح طبيعة المجال $f(I)$

المجال $f(I)$		المجال I
f تناقصية قطعاً على I	f تزايدية قطعاً على I	
$[f(b); f(a)]$	$[f(a); f(b)]$	$[a, b]$
$\left[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); f(a) \right]$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right]$	$[a, b[$
$\left[f(b); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$	$\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); f(b) \right]$	$]a, b]$
$\left[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$	$\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow b^-} f(x) \right]$	$]a, b[$
$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); f(a) \right]$	$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$	$[a, +\infty[$
$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) \right]$	$\left[\lim_{x \rightarrow a^+} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$	$]a, +\infty[$
$\left[f(a); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$	$\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); f(a) \right]$	$] -\infty, a]$
$\left[\lim_{x \rightarrow a^-} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$	$\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) \right]$	$] -\infty, a[$
$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right]$	$\left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right]$	$\mathbb{R}$

← مبرهنة القيم الوسيطة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a, b]$ فإنه لكل عدد حقيقي β محصور بين العددين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عدد حقيقي α من المجال $[a, b]$ بحيث: $f(\alpha) = \beta$

◆ نتيجة:

إذا كانت f متصلة على مجال $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حلاً α ينتمي إلى المجال $[a, b]$
 إذا كانت f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال $[a, b]$ و $f(a) \times f(b) < 0$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلاً وحيداً α ينتمي إلى المجال $[a, b]$

← طريقة النقر الثاني:

لتكن f دالة متصلة ورتيبة قطعاً على مجال $[a, b]$ بحيث: $f(a) \times f(b) < 0$ وليكن α الحل الوحيد للمعادلة $f(x) = 0$ في المجال $[a, b]$

إذا كان: $f(b) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$
 فإن: $\frac{a+b}{2} < \alpha < b$ وهذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$
 يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[\frac{a+b}{2}; b\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α

إذا كان: $f(a) \times f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$
 فإن: $a < \alpha < \frac{a+b}{2}$ وهذا التأطير سعته $\frac{b-a}{2}$
 يمكن إعادة هذه الطريقة على المجال $\left[a; \frac{a+b}{2}\right]$ للحصول على تأطير أدق للعدد α

ملاحظة: وهكذا دواليك يمكن إعادة هذه الطريقة إلى أن يتم الحصول على تأطير للعدد α سعته مرغوب فيها