

درس الاتصال

(الثانية علوم تجريبية)

1) ذكر النهايات

1. لكل n من N^* لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = \begin{cases} +\infty & \text{زوجي} \\ -\infty & \text{فردي} \end{cases}$

2. نهاية دالة حدودية عند $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدتها الأعلى درجة

3. نهاية دالة جذرية هي خارج نهاية حدتها الأعلى درجة في البسط على حدتها الأعلى درجة في المقام

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(ax)}{x} = a \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{x} = a \quad .4$$

5. جداول النهايات:

$\lim f$	l	l	l	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim f + g$	$l + l'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$
$\lim g$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim f \times g$	$l \times l'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	شكل غير محدد

$\lim f$	$l \neq 0$	0^+	0^-	$+\infty$	$-\infty$
$\lim \frac{1}{f}$	$\frac{1}{l}$	$+\infty$	$-\infty$	0	0

$\lim f$	l	$l > 0$	$l > 0$	$l < 0$	$l < 0$	l	$\pm\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim g$	$l' \neq 0$	0^+	0^-	0^+	0^-	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0^+	0^-	0^+	0^-
$\lim \frac{f}{g}$	$\frac{l}{l'}$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	0	شكل غير محدد	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2) اتصال دالة في عدد :

تعريف 1:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a) \Leftrightarrow a \text{ متصلة في } f$$

مثال : أدرس اتصال الدالة f في العدد 1 : $a=1$

لدينا : $f(1) = 8$

لحسب

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 6x - 7}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+7)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x+7) = 8$$

بما أن $f(1) = 8$ فإن $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$.

تعريف 2:

متصلة في a على اليمين $\Leftrightarrow \checkmark$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = f(a)$$

متصلة في a على اليسار $\Leftrightarrow \checkmark$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$$

متصلة في a $\Leftrightarrow \checkmark$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) = f(a)$$

مثال : أدرس اتصال الدالة f في العدد 0 : $a=0$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sin(2x)}{x} & ; x > 0 \\ f(x) = x^2 - x + 2 & ; x \leq 0 \end{cases}$$

لدينا : $f(0) = (0)^2 - (0) + 2 = 2$

لحسب $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{\sin(2x)}{x} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} 2 \cdot \frac{\sin(2x)}{2x} = 2$

لحسب $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} x^2 - x + 2 = 2$

بما أن : $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) = f(0)$

3) الاتصال على مجال :

خاصيات :

- f متصلة على مجال $[a, b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $[a, b]$
- f متصلة على مجال $[a, b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $[a, b]$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b
- f متصلة على مجال $[a, b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $[a, b]$ و متصلة على يمين a
- f متصلة على مجال $[a, b]$ يعني f متصلة في جميع عناصر المجال $[a, b]$ و متصلة على يسار b

4) العمليات على الدوال المتصلة

الدوال الحدودية متصلة على \mathbb{R}

الدوال الجذرية متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها

الدوال المثلثية \sin و \cos متصلتان على \mathbb{R}

دالة \tan متصلة على كل مجال ضمن مجموعة تعريفها

إذا كانت f و g متصلتان على مجال I فإن $f+g$ و $f \times g$ متصلتان على I

إذا كانت f و g متصلتان على مجال I و $g \neq 0$ على I فإن $\frac{1}{g}$ و $\frac{f}{g}$ متصلتان على I .

إذا كانت f متصلة على مجال I و $f \geq 0$ على I فإن \sqrt{f} متصلة على I .

إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على J بحيث $J \subset I$ فإن $g \circ f$ متصلة على I

أمثلة :

1. $f : x \mapsto x^3 - \frac{1}{2}x + 1$ متصلة على \mathbb{R}

2. $f : x \mapsto \frac{2x}{x-2}$ دالة جذرية متصلة على كل مجال ضمن $[2, +\infty) \cup (-\infty, 2]$ لأن f لأن $D_f =]-\infty, 2[\cup]2, +\infty[$

3. $f : x \mapsto \cos x + x^2 - 7x + 3$

لدينا : $f_1 : x \mapsto \cos x$ متصلة على \mathbb{R} و $f_2 : x \mapsto x^2 - 7x + 3$ متصلة على \mathbb{R}

إذن $f = f_1 + f_2$ متصلة على \mathbb{R} كمجموع لالتي متصلتين على \mathbb{R}

4. $f : x \mapsto (x-1) \times \sin x$

لدينا : $f_1 : x \mapsto x-1$ متصلة على \mathbb{R} و $f_2 : x \mapsto \sin x$ متصلة على \mathbb{R}

إذن $f = f_1 \times f_2$ متصلة على \mathbb{R} كجداء لالتي متصلتين على \mathbb{R}

5. $f : x \mapsto \sqrt{x-2}$

لدينا : $f_1(x) \geq 0$: $f_1: x \mapsto x$ متصلة على $[2, +\infty]$ و لكل x من $[2, +\infty]$

إذن $f = \sqrt{f_1}$ متصلة على $[2, +\infty]$

$$f : x \mapsto \frac{\sqrt{x}}{x^2 + 1} . 6$$

لدينا : $f_1: x \mapsto \sqrt{x}$ متصلة على \mathbb{R}^+

و لدينا $f_2(x) \neq 0$: $f_2: x \mapsto x^2 + 1$ متصلة على \mathbb{R}^+ بالخصوص على \mathbb{R} و لكل x من \mathbb{R}^+

إذن $f = \frac{f_1}{f_2}$ متصلة على \mathbb{R}^+

$$f : x \mapsto \sin\left(x^2 + \frac{\pi}{7}\right) . 7$$

لدينا $f_2: x \mapsto \sin(x)$ حدودية متصلة على \mathbb{R} بحيث $f_1(x) = \mathbb{R}$ و الدالة f_1 متصلة

على \mathbb{R}

إذن $f = f_2 \circ f_1$ متصلة على \mathbb{R}

5 صورة مجال بدلالة متصلة و رتبة قطعا

$f(I)$	المجال I	
$[f(a), f(b)]$	$[a, b]$	
$\left[f(a), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$	$[a, b[$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), f(b) \right]$	$]a, b]$	
$\left[\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x) \right[$	$]a, b[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), f(a) \right]$	$] -\infty, a]$	
$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x) \right[$	$] -\infty, a[$	
$\left[f(b), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$[b, +\infty[$	
$\left] \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$]b, +\infty[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, +\infty[$	
$[f(b), f(a)]$	$[a, b]$	
$\left[\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x), f(a) \right[$	$[a, b[$	
$\left[f(b), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right[$	$]a, b]$	
$\left[\lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x < b}} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) \right[$	$]a, b[$	
$\left[f(a), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, a]$	
$\left[\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x < a}} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, a[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f(b) \right]$	$[b, +\infty[$	
$\left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{\substack{x \rightarrow b \\ x > b}} f(x) \right[$	$]b, +\infty[$	
$\left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right[$	$] -\infty, +\infty[$	

ترابية قطعا f

تناصصية قطعا f

مثال 1:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :

لدينا : $D_f = \{x \in \mathbb{R} / x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq 1\} = \mathbb{R} - \{1\} =]-\infty, 1[\cup]1, +\infty[$

لنحدد صور المجالات التالية : $[0;1]$ و $[1;4]$ و $[-\infty;1[$ و $2;3]$

الدالة f قابلة للاشتغال على كل مجال ضمن D_f (لأنها دالة جذرية)

ليكن $x \in D_f$

$$f'(x) = \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)' = \frac{(2x+1)'(x-1) - (2x+1)(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2(x-1) - (2x+1).1}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x-1}{(x-1)^2} = \frac{-3}{(x-1)^2}$$

إذن : $f'(x) < 0$. من الواضح أن f تناقصية قطعا ($\forall x \in D_f$) و منه الدالة f تناقصية قطعا

على D_f

$$f([2;3]) = [f(3);f(2)] = \left[\frac{7}{2}; 5 \right]$$

$$f(]1;+\infty[) = \left[\lim_{\substack{x \rightarrow +\infty \\ x > 1}} f(x); \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \right] =]2;+\infty[$$

$$f(]-\infty;1[) = \left[\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x); \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \right] =]-\infty;2[$$

$$f(]1;4[) = \left[f(4); \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) \right] = [3;+\infty[$$

$$f([0;1[) = \left[\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x); f(0) \right] =]-\infty;-1]$$

مثال 2:

نعتبر الدالة العددية f المعرفة بما يلي :
 الدالة f قابلة للاشتغال على \mathbb{R} لأنها دالة حدودية
 $(\forall x \in \mathbb{R}) f'(x) > 0$ إذن $f'(x) = (x^3 + 7x - 2)' = 3x^2 + 7 : x \in \mathbb{R}$
 ليكن f تزايدية قطعا على \mathbb{R} و منه الدالة f

لنحدد صور المجالات التالية : $[1;3]$ و $[-\infty; +\infty]$

$$f([- \infty; + \infty]) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [-\infty; +\infty]$$

$$f([1;3]) = [f(1); f(3)] = [6; 46]$$

6) مبرهنة القيم الوسيطية :

إذا كانت f متصلة على $[a;b]$ فإنه لكل λ محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل c من $[a;b]$ بحيث $f(c) = \lambda$:

نتائج :

▪ مبرهنة القيم الوسيطية (وجودية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة على $[a,b]$ و $f(a) < f(b)$ فإن المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا على الأقل في المجال $[a,b]$

مثال :

لنبين أن المعادلة : $x^4 + x - 3 = 0$ تقبل حلا على الأقل في $[0;2]$

✓ نعتبر الدالة f المعرفة ب :

• الدالة f متصلة على \mathbb{R} لأنها دالة حدودية بالخصوص على المجال $[0,2]$

• لدينا $f(0) < 0$ و $f(2) = 15$ إذن $f(0) < f(2)$

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطية فإن المعادلة : $0 = f(x)$ تقبل حلا على الأقل في $[0;2]$

▪ مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية (وجودية ووحدانية الحل على $[a,b]$)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على $[a,b]$ فإن المعادلة $0 = f(x) < f(a) \times f(b)$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[a,b]$

مثال :

لنبين أن المعادلة $1 = x^3 + 2x$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[0,1]$

✓ نعتبر الدالة f المعرفة ب :

• الدالة f متصلة على \mathbb{R} (لأنها دالة حدودية) بالخصوص على المجال $[0,1]$

• الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} (لأنها دالة حدودية) بالخصوص على المجال $[0,1]$

ليكن $f'(x) = (x^3 + 2x - 1)' = 3x^2 + 2$: $x \in [0;1]$

إذن : $\forall x \in \mathbb{R}$ و منه f تزايدية قطعا على $[0,1]$

$f(0) \times f(1) < 0$ و إذن $f(1) = 2$ $f(0) = -1$ •

و منه حسب مبرهنة القيم الوسيطية بالوحدانية فإن المعادلة : $0 = f(x)$ تقبل حلا وحيدا في $[0;1]$

▪ مبرهنة (وجودية ووحدانية الحل على مجال I)

إذا كانت f متصلة و رتيبة قطعا على I و $f(x) = 0$ فإن المعادلة $0 \in f(I)$ تقبل حلا وحيدا في المجال I

مثال :

لنبين أن المعادلة $2x^3 + 5x - 4 = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R} ثم تتحقق أن $1 < \alpha < 0$

✓ نعتبر الدالة f المعرفة ب : $f(x) = 2x^3 + 5x - 4$

• الدالة f متصلة على \mathbb{R} (لأنها دالة حدودية)

• الدالة f قابلة للاشتقاق على \mathbb{R} (لأنها دالة حدودية)

ليكن $f'(x) = (2x^3 + 5x - 4)' = 3x^2 + 5$: $x \in \mathbb{R}$

إذن : $f'(x) > 0$ و منه f تزايدية قطعا على \mathbb{R} ($\forall x \in \mathbb{R}$)

• لحسب $f(\mathbb{R}) = f([-∞; +∞]) = \left[\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right] = [-\infty; +\infty] = \mathbb{R}$: $f(\mathbb{R})$

إذن : $0 \in f(\mathbb{R})$

و بالتالي المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حلا وحيدا α في \mathbb{R}

✓ لتحقق أن $1 < \alpha < 0$:

• الدالة f متصلة $[0, 1]$

• $f(0) \times f(1) < 0$ إذن $f(0) = -4$ و $f(1) = 3$

إذن حسب مبرهنة القيم الوسيطية فإن : $0 < \alpha < 1$



7) الدالة العكسية لدالة متصلة و رتبة قطعا :

خاصية :

إذا كانت f دالة متصلة و رتبة قطعا على مجال I فإن f^{-1} تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من مجال $(I) = f(J)$ نحو

I

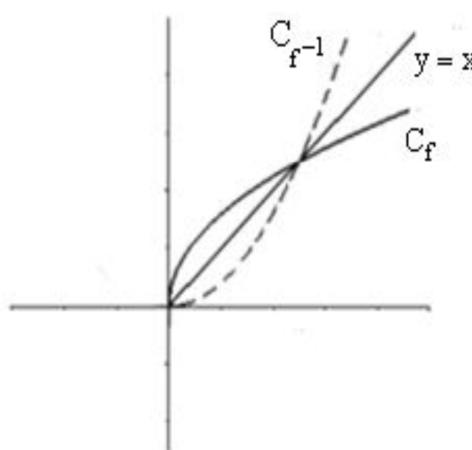
نتائج:

$$(1) \quad \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x \in J \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I \end{cases}$$

$$(2) \quad \begin{cases} f^{-1} \circ f(x) = x & ; x \in I \\ f \circ f^{-1}(x) = x & ; x \in J \end{cases}$$

خاصيات:

- لتكن f دالة و f^{-1} دالتها العكسية على المجال J لدينا :
- f^{-1} متصلة على المجال J
 - f و f^{-1} لهما نفس الرتبة
 - منحنى f^{-1} هو مماثل لمنحنى f بالنسبة لل المستقيم ذي المعادلة $y = x$ (المنصف الأول للمعلم)



مثال :

نعتبر الدالة f المعرفة بما يلي :

- لنبين أن g قصور f على المجال $[0;1]$ قبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J يتم تحديده :

✓ g قصور دالة جذرية معرفة على المجال $[0;1]$ إذن g متصلة على $[0;1]$

✓ g قصور دالة جذرية معرفة على المجال $[0;1]$ إذن g قابلة للاشتاقاق على $[0;1]$

$$g'(x) = \left(\frac{3x+5}{x+1} \right)' = \frac{-2}{(x+1)^2} : x \in [0;1]$$

ليكن

إذن : $\forall x \in [0;1] \quad g'(x) < 0$ و منه g تناقصية قطعا على $[0;1]$

و بالتالي g قبل دالة عكسية g^{-1} معرفة على مجال J نحو $[0;1]$

$$J = g([0;1]) = [g(1); g(0)] = [4;5]$$

بحيث :

• لنحدد : $(\forall x \in J) \quad g^{-1}(x) :$

ليكن $J = [4;5]$ ✓

$$y = g^{-1}(x) \Leftrightarrow x = g(y) \quad (y \in I = [0;1])$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{3y+5}{y+1}$$

$$\Leftrightarrow x \cdot (y+1) = 3y+5$$

$$\Leftrightarrow xy + x = 3y + 5$$

$$\Leftrightarrow xy - 3y = 5 - x$$

$$\Leftrightarrow y \cdot (x - 3) = 5 - x$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{5-x}{x-3}$$

$$(\forall x \in J = [4;5]) \quad g^{-1}(x) = \frac{5-x}{x-3} \quad \text{إذن :}$$

(8) الجذر من الدرجة n

أ. تعريف :

ليكن n من N^*

الدالة العكسية للدالة $x \mapsto x^n$ على المجال $[0, +\infty]$ تسمى دالة الجذر من الدرجة n و نرمز لها ب :
الدالة $x \mapsto \sqrt[n]{x}$ متصلة و تزايدية قطعا على $[0, +\infty]$

ب. أمثلة :

$$(n=1) \quad \sqrt[1]{x} = x$$

$$(n=2) \quad \sqrt[2]{x} = \sqrt{x}$$

$$(n=3) \quad \sqrt[3]{x}$$

ج. خصائص :

ليكن x و y عددين حقيقيان موجبان. لدينا :

$$\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[n]{x^m} \quad \sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mn]{x} \quad \sqrt[n]{x^n} = x \quad \left(\sqrt[n]{x}\right)^n = x$$

$$(y \neq 0) \quad \sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} \quad \sqrt[n]{x \cdot y} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y}$$

أمثلة :

أ. لنبوط ما يلي :

$$a = \sqrt[3]{27} \quad b = \sqrt[4]{16} \quad c = \sqrt[3]{\sqrt[3]{729}}$$

$$a = \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{3^3} = 3$$

$$b = \sqrt[4]{16} = \sqrt[4]{2^4} = 2$$

$$c = \sqrt[3]{\sqrt[3]{729}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{3^6}} = \sqrt[3]{3^2} = 3$$

ب. قارن العددان : $y = \sqrt[4]{5}$ و $x = \sqrt[3]{4}$

لدينا : $y = \sqrt[4]{5} = \sqrt[4 \times 3]{5^3} = \sqrt[12]{125}$ و $x = \sqrt[3]{4} = \sqrt[3 \times 4]{4^4} = \sqrt[12]{256}$

بما أن $256 > 125$ فإن $\sqrt[12]{256} > \sqrt[12]{125}$ و منه $y > x$

ج. اجعل مقام العدد التالي جذريا: $\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1}$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{4}-1} = \frac{1}{\frac{(\sqrt[3]{4})^3 - 1^3}{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} + 1^2}} = \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} + 1^2}{(\sqrt[3]{4})^3 - 1^3} = \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} + 1}{4 - 1} = \frac{(\sqrt[3]{4})^2 + \sqrt[3]{4} + 1}{3}$$

د. خاصية:

لتكن f دالة و $n \in \mathbb{N}^*$

► إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

► إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{l}$ فإن $l \geq 0$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

► إذا كانت f متصلة و موجبة على مجال I فإن $\sqrt[n]{f}$ متصلة على I

أمثلة:

1. لنحسب $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x^2 + x - 1}$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 + x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$

2. لنحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{8x}{x+1}}$

لدينا: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[3]{\frac{8x}{x+1}} = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{2^3} = 2$

3. لندرس اتصال الدالة: $h: x \mapsto \sqrt[3]{x^2}$

لدينا: $(\forall x \in \mathbb{R}) f(x) \geq 0$ و f متصلة على \mathbb{R}

إذن الدالة $h = \sqrt[3]{f}$ متصلة على \mathbb{R}

9) القوى الجذرية لعدد حقيقي:

أ. تعريف:

ليكن n و m من \mathbb{N}^* و $x > 0$ لدينا :

$$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$$

أمثلة:

$$5^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{5^3} \quad \bullet$$

$$4^{-\frac{5}{2}} = \frac{1}{4^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{\sqrt[2]{4^5}} = \frac{1}{\sqrt[2]{2^{10}}} = \frac{1}{2^{10}} \quad \bullet$$

ب. خاصية:

لكل عددين حقيقيين موجبين قطعا x و y و لكل r و r' من \mathbb{Q}^* :

$$(x^r)^{r'} = x^{r \cdot r'} \quad \bullet$$

$$x^r \cdot y^r = (x \cdot y)^r \quad \bullet$$

$$x^{r+r'} = x^r x^{r'} \quad \bullet$$

$$\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'} \quad \bullet$$

$$\frac{x^r}{y^r} = \left(\frac{x}{y}\right)^r \quad \bullet$$

$$\frac{1}{x^r} = x^{-r} \quad \bullet$$

مثال:

$$A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{8}} \times \sqrt[4]{32}}{\sqrt{2} \times \sqrt[12]{64}} \quad \text{لنبسط العدد}$$

$$A = \frac{\sqrt[3]{\sqrt{8}} \times \sqrt[4]{32}}{\sqrt{2} \times \sqrt[12]{64}} = \frac{\left(8^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \times \left(32^{\frac{1}{4}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{1}{12}}} = \frac{8^{\frac{1}{6}} \times 32^{\frac{1}{8}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 64^{\frac{1}{12}}} = \frac{(2^3)^{\frac{1}{6}} \times (2^5)^{\frac{1}{8}}}{2^{\frac{1}{2}} \times (2^6)^{\frac{1}{12}}} = \frac{2^{\frac{3}{6}} \times 2^{\frac{5}{8}}}{2^{\frac{1}{2}} \times 2^{\frac{6}{12}}} = \frac{\sqrt[2]{2} \times 2^{\frac{5}{8}}}{\sqrt[2]{2} \times 2^{\frac{1}{2}}} = 2^{\frac{5-1}{8}} = 2^{\frac{1}{8}} = \sqrt[8]{2}$$

つづく