

ال نهايات و الاتصال

I- النهاية المتنمية

1- النهاية 1 عند x_0

أ- النهاية 0 عند 0

تمرين

نعتبر الدالتي f و g حيث $f(x) = x^2$ و $g(x) = \frac{x^3}{|x|}$

1- أ) مثل مبيانيا f

$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 / f([- \alpha; \alpha] \setminus \{0\}) \subset [-\varepsilon; \varepsilon]$

ب) بين مبيانيا أن

ج) بين ذلك جبريا

2- أ) مثل مبيانيا g

$\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 / g([- \alpha; \alpha] \setminus \{0\}) \subset [-\varepsilon; \varepsilon]$

ج) بين ذلك جبريا

3- أتمم الجدول التالي

| $g(x)$ | $f(x)$ | x |
|--------|--------|--------------|
| | | -10^{-2} |
| | | -10^{-5} |
| | | -10^{-100} |
| | | 0 |
| | | 10^{-100} |
| | | 10^{-5} |
| | | 10^{-2} |

ملاحظة:

نلاحظ كلما اقترب x من 0 يقترب $f(x)$ من 0، بل أكثر كلما كان x يؤول إلى 0 فان $f(x)$ يؤول إلى 0
نقول إن نهاية f هي 0 عندما يؤول x إلى 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

نفس الملاحظة على الدالة g

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه 0
نقول إن نهاية f هي 0 عندما يؤول x إلى 0 إذا وفقط إذا كان
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \alpha > 0 \forall x \in D_f \quad 0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

ملاحظة

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0 \quad *$$

* إذا كانت f و g منطبقتين على مجال مفتوح منقط مركزه 0 فان $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$ و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

خاصية

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} ax^n = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} a\sqrt{x} = 0$$

خاصية

إذا وجد مجال I مفتوح منقط مرکزه 0 بحيث $\forall x \in I \quad |f(x)| \leq u(x)$ وكان $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ فان

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$$

البرهان

$$I =]-\beta; \beta[- \{0\} \quad \text{ل يكن } 0 > \beta \text{ و } \beta > 0$$

$$\forall x \in]-\beta; \beta[- \{0\} \quad |f(x)| \leq u(x) \quad \text{لدينا}$$

و حيث أن $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x| < \alpha \Rightarrow |u(x)| < \varepsilon$ فان $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x| < \lambda \Rightarrow \begin{cases} |u(x)| < \varepsilon \\ |f(x)| \leq u(x) \end{cases} \quad \lambda = \inf(\alpha; \beta)$$

و بالتالي $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x| < \lambda \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \quad \text{إذن}$$

تمرين

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$$

ب- النهاية ا عند x_0

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مرکزه x_0

حدسيًا: $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى x_0

عندما يقترب x من x_0 أي عندما تقترب h من 0

حيث $h = x - x_0$ فان $f(x) - l$ تقترب من 0

أي $f(x_0 + h) - l$ تقترب من 0

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مرکزه x_0

نقول إن نهاية f هي l عندما يؤول x إلى x_0 إذا وفقط إذا كان نهاية الدالة $f(x_0 + h) - l$ هي 0

عندما يؤول h إلى 0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

ملاحظة

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - l = 0 \quad *$$

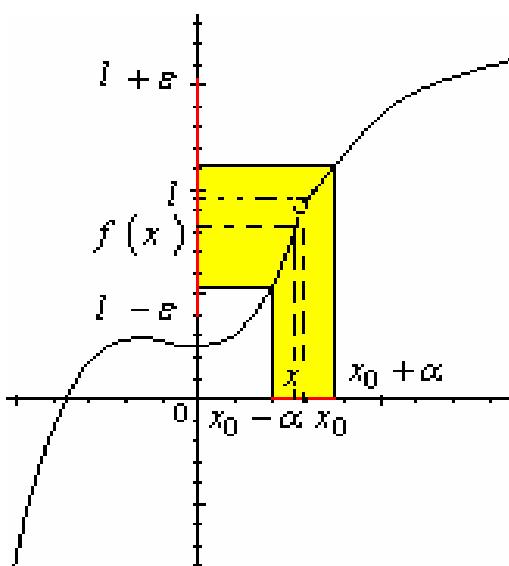
* إذا كانت الدالة نهاية عند x_0 فان هذه النهاية وحيدة

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - l = 0 \quad *$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow x_0} a(x - x_0)^n = 0 \quad *$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-1}{x-3} = 9 \quad \text{بين أن} \quad *$$

تمرين



خاصية

إذا وجد مجال I مفتوح منقط مركزه x_0 وكان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ فان $|f(x) - l| \leq u(x)$ حيث $x \in I$

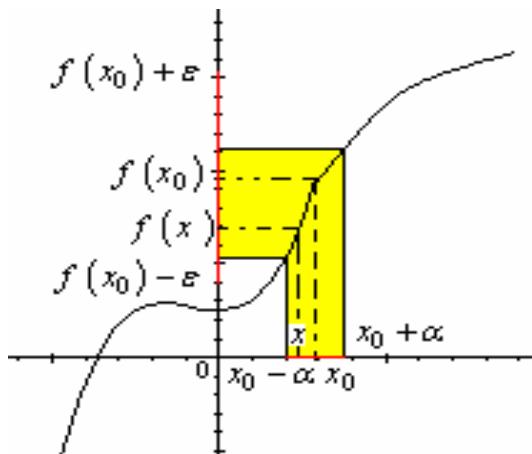
تمرين

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 \cos \frac{1}{x} = 2$$

خاصية

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l| \text{ فان } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$$

2- اتصال دالة



أ- تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

أمثلة

الدوال $(n \in \mathbb{N}^* \quad a \in \mathbb{R})$ $x \rightarrow ax^n$ متصلة في 0

الدوال الثابتة متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها

الدالة $x \rightarrow \sqrt{|x|}$ متصلة في 0

اصطلاح

إذا كانت f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 وكانت غير متصلة في x_0 فإننا نقول إن f متقطعة في x_0

تمرين

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

نعتبر f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ

أدرس اتصال f في 1

ب- خاصية

كل دالة حدودية متصلة في كل نقطة من \mathbb{R}

البرهان

لتكن P دالة حدودية و x_0 عنصر من \mathbb{R}

نعلم أنه توجد حدودية Q حيث $P(x) - P(x_0) = (x - x_0)Q(x)$

نفترض أن

$$|Q(x)| \leq |a_n| |x^n| + |a_{n-1}| |x^{n-1}| + \dots + |a_1| |x| + |a_0| \quad Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

ليكن M أكبر الأعداد $|a_i|$ حيث $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ ومنه $|Q(x)| \leq M(|x^n| + |x^{n-1}| + \dots + |x| + 1)$

نفترض أن $|x| < \alpha$ $\alpha = \sup(|x_0 - 1|, |x_0 + 1|)$ و $x_0 - 1 < x < x_0 + 1$

$$|Q(x)| \leq M(\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + \alpha + 1)$$

$$|x - x_0| |Q(x)| \leq k |x - x_0| \quad k = M(\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + \alpha + 1)$$

نضع (k)

وبالتالي $|P(x) - P(x_0)| \leq k|x - x_0|$

وحيث أن $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$ فان $\lim_{x \rightarrow x_0} k|x - x_0| = 0$

إذن P متصلة في x_0

ج- تطبيقات على حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x - 5} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 2} |x^2 - 7x - 2| ; \lim_{x \rightarrow -1} 3x^2 + 4x - 2$$

د- تمديد بالاتصال

الدالة $f: x \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ غير معرفة في 1

ولدينا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$

الدالة g المعرفة بـ $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ g(1) = 2 & \end{cases}$ ومتصلة في 1

نقول ان g تمديد بالاتصال لدالة f في 1

تعريف

لتكن f دالة غير معرفة في x_0 لكن لها نهاية l في

الدالة g المعرفة بـ $\begin{cases} g(x) = f(x) & x \in D_f \\ g(x_0) = l & \end{cases}$ هي دالة متصلة في x_0 تسمى تمديد بالاتصال لدالة f

في x_0

تمرين

أعط تمديدا بالاتصال لدالة f في x_0 في الحالتين

$$\begin{cases} f(x) = x \sin \frac{1}{x^2} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 8}{x + 2} \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

3- النهاية على اليمين- النهاية على اليسار

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{|x-1|(x+2)}{x-1}$ ($C_f = \mathbb{R} - \{1\}$)

* نلاحظ أن قصور الدالة f على $[1; +\infty)$ ينطبق مع قصور الدالة g حيث $g(x) = x + 2$

ونعلم أن $\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 = 3$

نقول ان نهاية f هي 3 على يمين 1

و نكتب $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$ أو $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$

* نلاحظ أن قصور الدالة f على $(-\infty; 1]$ ينطبق مع قصور الدالة h حيث $h(x) = -x - 2$

ونعلم أن $\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -x - 2 = -3$

نقول ان نهاية f هي 3 على يسار 1

و نكتب $\lim_{x \rightarrow l^+} f(x) = -3$ أو $\lim_{x \rightarrow l^-} f(x) = -3$

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $[x_0; x_0 + \alpha]$ حيث $\alpha > 0$] حيث x_0 على يمين x_0 إذا كان قصورها على $[x_0; x_0 + a]$ حيث $a > 0$ ينطبق مع قصور

دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 تكون نهايتها l عند x_0 و نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$ تكون نهايتها l عند x_0 و نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$

بالمثل نعرف النهاية على اليسار **خاصية**

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

تمرين

أدرس نهاية الدالة f في x_0 في الحالتين التاليتين

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + 2|x|}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = x^2 + 4x + 4 & x > -2 \\ f(x) = 2x^2 + 2x & x \leq -2 \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

نتائج

تكون f متصلة على يمين x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

تكون f متصلة على يسار x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان f متصلة على يمين x_0 وعلى يسار x_0

تمرين

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + ax & x > -1 \\ f(x) = -x + 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

1- حدد a لكي تكون f متصلة في -1

2- أدرس اتصال f في x_0 في الحالتين

$$x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ f(x) = x^2 - x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$x_0 = 2 ; \begin{cases} f(x) = 2x + 1 & x > 2 \\ f(x) = x^2 - 1 & x \leq 2 \end{cases}$$

4- الاتصال في مجال

تعريف

لتكن f دالة معرفة على $[a; b]$

تكون f متصلة على $[a; b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $[a; b]$

تكون f متصلة على $[a; b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $[a; b]$ ومتصلة على يمين a وعلى يسار b

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

بالمثل نعرف الاتصال على $[a; b]$ و على $[a; b[$

ملاحظة

التمثيل المباني لدالة متصلة على $[a; b]$ هو خط متصل طرفاه النقطتين اللتين

إحدايهما $(b; f(b))$ و $(a; f(a))$

II- النهاية المنتهية عند $-\infty$ أو عند $+\infty$

1- النهاية 0 عند $+\infty$

تمرين

نعتبر الدالة f حيث $f(x) = \frac{1}{x}$

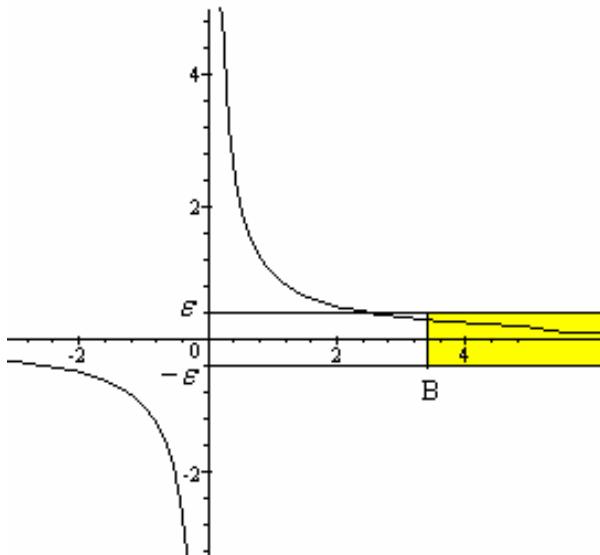
1- أرسم C_f

2- أتمم الجدول التالي و ماذا تلاحظ

| | | | | |
|--------|------------|-------------|----------------|-----------------|
| x | 10^{100} | 10^{10^9} | $10^{10^{12}}$ | $10^{10^{100}}$ |
| $f(x)$ | | | | |

3- بين أن

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad f([B; +\infty[) \subset]-\varepsilon; \varepsilon[$$



-3

ليكن $\varepsilon > 0$

نبحث عن $B > 0$ حيث $\varepsilon < f(x)$

$$\forall x > 0 \quad |f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$B = \frac{1}{\varepsilon}$$

للحصول $|f(x)| < \varepsilon$

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى $+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

تعريف

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $[a; +\infty[$

نقول إن $f(x)$ تؤول إلى 0 عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

خصائص

خاصية 1

$$\forall (k, n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{x}} = 0$$

خاصية 2

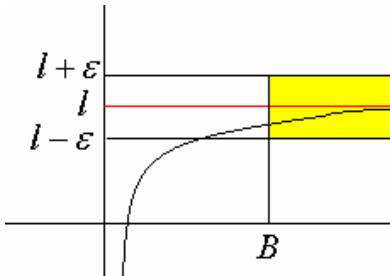
إذا وجد مجال على شكل $[a; +\infty]$ بحيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ وكان $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0 \quad \forall x \in [a; +\infty]$ فإن $|f(x)| \leq u(x)$

تمرين تطبيقي

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{4x^2 + 3}$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{4x^2 + 3} = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x^2} = 0$ وحيث $\left| \frac{7}{4x^2 + 3} \right| \leq \frac{7}{x^2}$ ومنه $4x^2 + 3 > x^2$

2- النهاية l عند $+\infty$ تعرف



لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $[a; +\infty]$ نقول إن $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى $+\infty$ إذا و فقط $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$ إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

مثال

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} = 1 \quad \text{بين أن}$$

3- النهاية l عند $-\infty$ تعرف

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $[-\infty; a]$ نقول إن $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى $-\infty$ إذا و فقط إذا كان $l = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

ملاحظات

- إذا كانت f زوجية فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

- إذا كانت f فردية فإن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

III- النهايات المتنامية والترتيب
خاصيات

خاصية 1

هذا الملف تم تحميله من موقع Talamid.ma

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقطر I مرکزه x_0
إذا كان $I = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ و f موجبة على I فان $I \geq 0$

خاصية 2

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقطر مرکزه x_0
إذا كان $I = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times l > 0$ بحيث $l \neq 0$ فانه يوجد مجال مفتوح منقطر J مرکزه x_0 بحيث $I \subset J$

خاصية 3

و f و g دالتان معرفتان على مجال مفتوح منقطر I مرکزه x_0
إذا كان $I = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \geq l$ و كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l'$ على I فان $l' \geq l$

خاصية 4

و f و g و h دوال معرفة على مجال مفتوح منقطر I مرکزه x_0
إذا كان $I = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ و كان $f \geq g \geq h$ على I فان I

IV- العمليات على النهايات المتنهية

و f و g دالتان لكل منهما نهاية متنهية في x_0 و λ عدد حقيقي
الدوال $f + g$ و $f \times g$ و λf و $|f|$ لها نهاية متنهية في x_0

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right|$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} = \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}$$

$$\text{إذا كانت } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0 \text{ فان } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq 0$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$$

$$\text{إذا كان } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0 \text{ فان } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$$

ملاحظة: الخاصيات تبقى صالحة في $x_0 = +\infty$ و $x_0 = -\infty$

V- العمليات على الدوال المتصلة

خاصيات

- مجموع دالتين متصلتين في x_0 هي دالة متصلة في x_0

- جداء دالتين متصلتين في x_0 هي دالة متصلة في x_0

- جداء دالة متصلة في x_0 في عدد حقيقي هي دالة متصلة في x_0

- اذا كانت f و g دالتين متصلتين في x_0 وكان $g(x_0) \neq 0$ فان الدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتان في x_0

- اذا كانت f موجبة على مجال مفتوح مرکزه x_0 ومتصلة في x_0 فان دالة \sqrt{f} متصلة في x_0

- اذا كانت f دالة معرفة على مجال مفتوح مرکزه x_0 وكان $f(x) \rightarrow x$ دالة متصلة وكانت $f(ax+b)$ فان الدالة

متصلة في x_0 متصلة في $x \rightarrow f(ax+b)$

نتيجة

كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها

تذكير: الدالة الجذرية هي خارج دالتين حدوديتين
تمارين

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x-2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 5x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1} ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 6}$$

-1 حدد $x^2 - x$
-2 أدرس اتصال الدوال

$$t(x) = \frac{2x^2 - 3x}{|x|} \quad \begin{cases} h(x) = 2x^2 - x & x > 1 \\ h(x) = -x^2 + 2 & x \leq 1 \end{cases} \quad g(x) = x^2 - 1 + \sqrt{x-2} \quad f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - x}$$

VI - الدوال المثلثية

$$\forall x \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \quad |\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$$

1- نهايات و اتصال الدوال

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \forall x \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \quad |\sin x| \leq |x|$$

إذن الدالة $x \rightarrow \sin x$ متصلة في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1$$

إذن $x \rightarrow \cos x$ متصلة في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

إذن $x \rightarrow \tan x$ متصلة في 0

ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} [\sin x_0 \cosh + \sinh \cos x_0]$$

$$= \sin x_0 \cos 0 + \sin 0 \cos x_0 = \sin x_0$$

إذن دالة $x \rightarrow \sin x$ متصلة في x_0

خاصة

الدالتان $x \rightarrow \sin x$ و $x \rightarrow \cos x$ متصلتان في \mathbb{R}

$$\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

نتائج

الدالتان $x \rightarrow \cos(ax+b)$ و $x \rightarrow \sin(ax+b)$ متصلتان في \mathbb{R}

الدالة $x \rightarrow \tan(ax+b)$ متصلة في حيز تعريفها

2- نهايات اعتيادية هامة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

لدينا $\frac{1}{|\tan x|} \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{|\sin x|}$ ومنه $\forall x \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right] \quad |\sin x| \leq |x| \leq |\tan x|$

$$|\cos x| \leq \frac{|\sin x|}{|x|} \leq 1 \quad \text{أي أن} \quad \frac{|\sin x|}{|\tan x|} \leq \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{|\sin x|}{|\sin x|}$$

وحيث أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ و $x \rightarrow \sin x$ لهما نفس الإشارة بجوار 0 فإن $\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1$

*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2 \sin^2 x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 1 *$$

خاصية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نتيجة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

تمرين

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x} \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 4x + \sin 2x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{4}} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x} \quad , \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}$$

7- النهايات اللامتناهية

1- النهاية $\pm\infty$ أو x_0 عند

2- أتمم الجدول التالي

| | | | | |
|--------|-------------|--------------|-----------------|------------------|
| x | 10^{-100} | 10^{-10^9} | $10^{-10^{12}}$ | $10^{-10^{100}}$ |
| $f(x)$ | | | | |

تمرين

$$f(x) = \frac{1}{|x|}$$

نعتبر $f(x) = \frac{1}{|x|}$

- أنشئ

ماذا تلاحظ (بين ذلك)

تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0) \quad (\exists \alpha > 0) \quad (\forall x \in D_f) \quad 0 < |x| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = +\infty$$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} -f(x) = +\infty$$

خاصية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{|x^n|} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{\sqrt[n]{|x|}} = +\infty \quad n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad k \in \mathbb{R}^{+*}$$

ليكن

2- النهاية $\pm\infty$ أو $\pm\infty$ عند $\pm\infty$ أو

* لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $[a; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0) \quad (\exists B > 0) \quad \forall x \in D_f \quad x > B \Rightarrow f(x) > A$$

خاصية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = +\infty$$

خاصية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$$

النهايات والترتب

* إذا كان لكل x من I $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ و كان $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$ فان $f(x) \geq u(x)$,

* إذا كان لكل x من I $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ و كان $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = -\infty$ فان $f(x) \leq u(x)$,

ملاحظة الخصائص السابقة تبقى صالحة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار مع تعويض I على التوالي بال المجالات $[a; +\infty[$ و $]-\infty; a[$ و $]x_0 - \alpha; x_0[$ و $]x_0; x_0 + \alpha[$ و $(\alpha > 0)$

VIII- العمليات على النهايات اللامتناهية

تعتبر دالتي f و g عند x_0 أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ ت تكون لدينا النتائج التالية:

أ- نهاية مجموع

| $f + g$ نهاية | g نهاية | f نهاية |
|---------------|-----------|----------------|
| $+\infty$ | $+\infty$ | $l \neq 0$ l |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $l \neq 0$ l |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| شكل غير محدد | $-\infty$ | $+\infty$ |

ب- نهاية حدا

| $f \times g$ نهاية | g نهاية | f نهاية |
|--------------------------------|-----------|----------------|
| $+\infty$ مع وضع إشارة l | $+\infty$ | $l \neq 0$ l |
| $+\infty$ مع وضع عكس إشارة l | $-\infty$ | $l \neq 0$ l |
| شكل غير محدد | $+\infty$ | 0 |
| شكل غير محدد | $-\infty$ | 0 |
| $+\infty$ | $+\infty$ | $+\infty$ |
| $+\infty$ | $-\infty$ | $-\infty$ |
| $-\infty$ | $-\infty$ | $+\infty$ |

ملاحظة:

لحساب نهاية λf حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ يمكن اعتبار λf كجدا الدالة الثابتة $\lambda \rightarrow x$ التي نهايتها هي λ و الدالة f

| $\frac{f}{g}$ نهاية | نهاية g | نهاية f |
|-------------------------------|--------------------|--------------------|
| 0 | $+\infty$ | l |
| 0 | $-\infty$ | l |
| مع وضع إشارة l ∞ | 0^+ | $l \neq 0$ حيث l |
| مع وضع عكس إشارة l ∞ | 0^- | $l \neq 0$ حيث l |
| شكل غير محدد | 0 | 0 |
| شكل غير محدد | $+\infty$ | $+\infty$ |
| شكل غير محدد | $-\infty$ | $-\infty$ |
| شكل غير محدد | $-\infty$ | $+\infty$ |
| مع وضع إشارة l ∞ | $l \neq 0$ حيث l | $+\infty$ |
| مع وضع عكس إشارة l ∞ | $l \neq 0$ حيث l | $-\infty$ |

د- نهاية \sqrt{f}

| \sqrt{f} نهاية | نهاية f |
|------------------|-----------|
| $+\infty$ | $+\infty$ |

IX- تطبيقات 1- دالة القوة الصحيحة

ليكن $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty$ $n \in \mathbb{N}^*$

إذا كان n زوجي فان $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty$ -

إذا كان n فردي فان $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty$ -

نتيجة

ليكن $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0$ $n \in \mathbb{N}^*$

2- الدالة الحدودية

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \quad \text{فان} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right] = 1 \quad \text{وحيث}$$

نهاية دالة حدودية عند ما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة

أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^5 + 3x^2 - 5x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^7 + 7x^3 - x + 31 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^7 = +\infty$$

3- الدالة الجذرية

نهاية دالة جذرية عند ما يقول x الى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حدتها الأكبر درجة

أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^5 + 3x^2 - 5x + 1}{3x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^5}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{3}x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7 + 7x^3 - x + 31}{x^9 + 3x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7}{x^9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5 + 3x^2 - 5x + 1}{3x^5 - x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5}{3x^5} = \frac{7}{3}$$

تمارين

حدد النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} ; \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x+1} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2}{x^2 - 3x + 2} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2} - x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} + 3x}{2x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 - x} ; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 2}{\sqrt{x-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - 4}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x+1} - 4}$$