

النهايات و الاتصال

1- النهاية المنتهية

1- النهاية عند x_0

أ- النهاية 0 عند 0

تمارين

نعتبر الدالتين f و g حيث $f(x) = x^2$ و $g(x) = \frac{x^3}{|x|}$

1- أ) مثل مبيانيا f

ب) بين مبيانيا أن $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 / f([- \alpha; \alpha] - \{0\}) \subset]-\varepsilon; \varepsilon[$

ج) بين ذلك جبريا

2- 2- أ) مثل مبيانيا g

ب) بين مبيانيا أن $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 / g([- \alpha; \alpha] - \{0\}) \subset]-\varepsilon; \varepsilon[$

ج) بين ذلك جبريا

3- أتمم الجدول التالي

x	$f(x)$	$g(x)$
-10^{-2}		
-10^{-5}		
-10^{-100}		
0	////////////////////	////////////////////
10^{-100}		
10^{-5}		
10^{-2}		

ملاحظة:

نلاحظ كلما اقترب x من 0 يقترب $f(x)$ من 0، بل أكثر كلما كان x يؤول إلى 0 فإن $f(x)$ يؤول إلى 0
نقول إن نهاية f هي 0 عندما يؤول x إلى 0

نكتب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

نفس الملاحظة على الدالة g

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه 0

نقول إن نهاية f هي 0 عندما يؤول x إلى 0 إذا وفقط إذا كان

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x| < \alpha \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

نكتب $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

ملاحظة

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow 0} |f(x)| = 0 \quad *$$

* إذا كانت f و g منطبقتين على مجال مفتوح منقط مركزه 0 و $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0$

خاصية

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow 0} ax^n = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} a\sqrt{x} = 0$$

خاصية

إذا وجد مجال I مفتوح منقط مركزه 0 بحيث $|f(x)| \leq u(x)$ و $\forall x \in I$ كان $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ فان $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

البرهان

ليكن $\beta > 0$ و $I =]-\beta; \beta[- \{0\}$

لدينا $\forall x \in]-\beta; \beta[- \{0\} \quad |f(x)| \leq u(x)$

و حيث أن $\lim_{x \rightarrow 0} u(x) = 0$ فان $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \alpha > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x| < \alpha \Rightarrow |u(x)| < \varepsilon$

نعتبر $\lambda = \inf(\alpha; \beta)$ $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x| < \lambda \Rightarrow \begin{cases} |u(x)| < \varepsilon \\ |f(x)| \leq u(x) \end{cases}$

و بالتالي $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \lambda > 0 \quad \forall x \in D_f \quad 0 < |x| < \lambda \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

إذن $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

تمرين

بين أن $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x+1} = 0$; $\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \frac{1}{x} = 0$

ب- النهاية عند x_0

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 حدسياً: $f(x)$ تؤول إلى l عندما يؤول x إلى x_0 عندما يقترب x من x_0 أي عندما تقترب h من 0 حيث $h = x - x_0$ فان $f(x) - l$ تقترب من 0 أي $f(x_0 + h) - l$ تقترب من 0

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 نقول إن نهاية f هي l عندما يؤول x إلى x_0 إذا وفقط إذا كان نهاية الدالة $h \rightarrow f(x_0 + h) - l$ هي 0 عندما يؤول h إلى 0 نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

ملاحظة

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = l \quad *$$

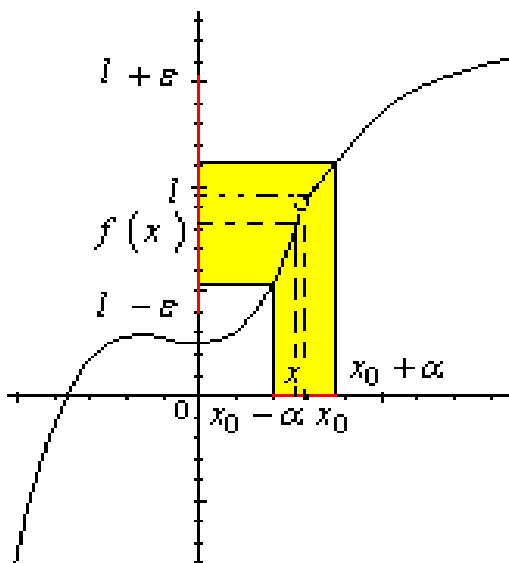
$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - l = 0 \quad *$$

* إذا كانت لدالة نهاية عند x_0 فان هذه النهاية وحيدة

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - l = 0 \quad *$$

$$\forall a \in \mathbb{R} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow x_0} a(x - x_0)^n = 0 \quad *$$

بين أن $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x-1}{x-3} = 9$ **تمرين**



خاصية

إذا وجد مجال I مفتوح منقط منقط مركزه x_0 بحيث $\forall x \in I \quad |f(x) - l| \leq u(x)$ و كان $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = 0$ فان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$

تعرين

$$\lim_{x \rightarrow 0} 2 + x^2 \cos \frac{1}{x} = 2 \quad \text{بين أن}$$

خاصية

إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ فان $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| = |l|$

2- اتصال دالة

أ- تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

أمثلة

الدوال $x \rightarrow ax^n$ متصلة في 0 ($n \in \mathbb{N}^*$ $a \in \mathbb{R}$)
الدوال الثابتة متصلة في كل نقطة من مجموعة تعريفها
الدالة $x \rightarrow \sqrt{|x|}$ متصلة في 0

اصطلاح

إذا كانت f دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 و كانت غير متصلة في x_0 فإننا نقول إن f متقطعة في x_0

تعرين

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ f(1) = 2 \end{cases}$$

نعتبر f دالة معرفة على \mathbb{R} بـ

أدرس اتصال f في 1

ب- خاصية

كل دالة حدودية متصلة في كل نقطة من \mathbb{R}

البرهان

لتكن P دالة حدودية و x_0 عنصر من \mathbb{R}

نعلم أنه توجد حدودية Q حيث $P(x) - P(x_0) = (x - x_0)Q(x)$

نفترض أن

$$|Q(x)| \leq |a_n||x^n| + |a_{n-1}||x^{n-1}| + \dots + |a_1||x| + |a_0| \quad Q(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

ليكن M أكبر الأعداد $|a_i|$ حيث $i \in \{0; 1; \dots; n\}$ ومنه $|Q(x)| \leq M(|x^n| + |x^{n-1}| + \dots + |x| + 1)$

نفترض أن $x_0 - 1 < x < x_0 + 1$ و $\alpha = \sup(|x_0 - 1|; |x_0 + 1|)$ ومنه $|x| < \alpha$

و بالتالي $|Q(x)| \leq M(\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + \alpha + 1)$

نضع $k = M(\alpha^n + \alpha^{n-1} + \dots + \alpha + 1)$ ومنه $|x - x_0||Q(x)| \leq k|x - x_0|$

وبالتالي $|P(x) - P(x_0)| \leq k|x - x_0|$
 و حيث أن $\lim_{x \rightarrow x_0} k|x - x_0| = 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} P(x) = P(x_0)$
 إذن P متصلة في x_0

ج- تطبيقات على حساب النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3 - 4x^2 - 4x - 5}{x - 5} ; \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x - 1} \quad \lim_{x \rightarrow 2} |x^2 - 7x - 2| ; \lim_{x \rightarrow -1} 3x^2 + 4x - 2$$

د- تمديد بالاتصال

الدالة $f: x \rightarrow \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ غير معرفة في 1
 ولدينا $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} x + 1 = 2$
 الدالة g المعرفة بـ $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1} & x \neq 1 \\ g(1) = 2 \end{cases}$ تنطبق على f في $\mathbb{R} - \{1\}$ ومتصلة في 1
 نقول ان g تمديد بالاتصال لدالة f في 1

تعريف

لتكن f دالة غير معرفة في x_0 لكن لها نهاية l في x_0
 الدالة g المعرفة بـ $\begin{cases} g(x) = f(x) & x \in D_f \\ g(x_0) = l \end{cases}$ هي دالة متصلة في x_0 تسمى تمديد بالاتصال لدالة f في x_0

تمرين

أعط تمديدا بالاتصال لدالة f في x_0 في الحالتين

$$\begin{cases} f(x) = x \sin \frac{1}{x^2} \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = \frac{3x^2 + 2x - 8}{x + 2} \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

3- النهاية على اليمين - النهاية على اليسار

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x) = \frac{|x - 1|(x + 2)}{x - 1}$
 $D_f = \mathbb{R} - \{1\}$ (أنشئ C_f)

* نلاحظ أن قصور الدالة f على $]1; +\infty[$ ينطبق مع قصور الدالة g حيث $g(x) = x + 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} g(x) = \lim_{x \rightarrow 1} x + 2 = 3$$

نقول ان نهاية f هي 3 على اليمين 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 3 \text{ أو } \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 3$$

* نلاحظ أن قصور الدالة f على $]-\infty; 1[$ ينطبق مع قصور الدالة h حيث $h(x) = -x - 2$

$$\lim_{x \rightarrow 1} h(x) = \lim_{x \rightarrow 1} -x - 2 = -3$$

نقول ان نهاية f هي -3 على يسار 1

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -3 \text{ أو } \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -3 \text{ و نكتب}$$

تعريف

لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]x_0; x_0 + \alpha[$ حيث $\alpha > 0$
نقول ان f تقبل النهاية l على يمين x_0 إذا كان قصورها على $]x_0; x_0 + a[$ حيث $a > 0$ ينطبق مع
قصور
دالة معرفة على مجال مفتوح منقط منقط مركزه x_0 تكون نهايتها l عند x_0 و نكتب $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = l$

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x > x_0}} f(x) = l \text{ أو}$$

بالمثل نعرف النهاية على اليسار

خاصية

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = l$$

تمرين

أدرس نهاية الدالة f في x_0 في الحالتين التاليتين

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x^3 + 2|x|}{x} \\ x_0 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} f(x) = x^2 + 4x + 4 & x > -2 \\ f(x) = 2x^2 + 2x & x \leq -2 \\ x_0 = -2 \end{cases}$$

نتائج

تكون f متصلة على يمين x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$

تكون f متصلة على يسار x_0 إذا وفقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$

تكون f متصلة في x_0 إذا وفقط إذا كان تكون f متصلة على يمين x_0 وعلى يسار x_0

تمرين

$$\begin{cases} f(x) = x^3 + ax & x > -1 \\ f(x) = -x + 1 & x \leq -1 \end{cases}$$

1- حدد a لكي تكون f متصلة في -1

2- أدرس اتصال f في x_0 في الحالتين

$$x_0 = 0 ; \begin{cases} f(x) = x \sin \frac{1}{x} & x > 0 \\ f(x) = x^2 - x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$x_0 = 2 ; \begin{cases} f(x) = 2x + 1 & x > 2 \\ f(x) = x^2 - 1 & x \leq 2 \end{cases}$$

4- الاتصال في مجال

تعريف

لتكن f دالة معرفة على $[a; b]$

تكون f متصلة على $[a; b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $[a; b]$

تكون f متصلة على $[a; b]$ إذا وفقط إذا كانت متصلة في كل نقطة من $[a; b]$ ومتصلة على يمين a ومتصلة على يسار b

بالمثل نعرف الاتصال على $[a; b]$ و على $[a; b[$

ملاحظة

التمثيل المبياني لدالة متصلة على $[a; b]$ هو خط متصل طرفاه النقطتين اللتين

إحداثيتهما $(a; f(a))$ و $(b; f(b))$

II- النهاية المنتهية عند $+\infty$ أو عند $-\infty$

1- النهاية 0 عند $+\infty$

تمرين

نعتبر الدالة f حيث $f(x) = \frac{1}{x}$

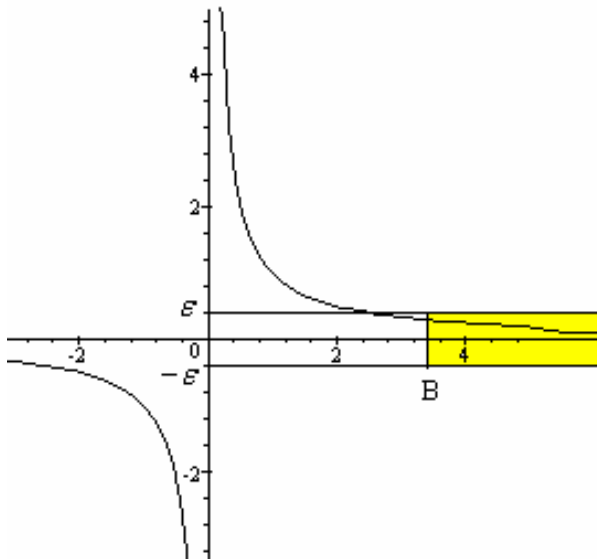
1- أرسم C_f

2- أتمم الجدول التالي و ماذا تلاحظ

x	10^{100}	10^{10^9}	$10^{10^{12}}$	$10^{10^{100}}$
$f(x)$				

3- بين أن

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad f([B; +\infty[) \subset]-\varepsilon; \varepsilon[$$



-3

ليكن $\varepsilon > 0$

نبحث عن $B > 0$ حيث $x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

$$\forall x > 0 \quad |f(x)| < \varepsilon \Leftrightarrow \frac{1}{x} < \varepsilon \Leftrightarrow x > \frac{1}{\varepsilon}$$

$$\text{نأخذ } B = \frac{1}{\varepsilon}$$

للحصول $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$

نقول إن $f(x)$ تتوّل إلى 0 عندما يتوّل x إلى $+\infty$

$$\text{نكتب } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

تعريف

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a; +\infty[$

نقول إن $f(x)$ تتوّل إلى 0 عندما يتوّل x إلى $+\infty$ إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \quad \text{نكتب } \forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad x > B \Rightarrow |f(x)| < \varepsilon$$

خاصيات

خاصية 1

$$\forall (k; n) \in \mathbb{R} \times \mathbb{N}^* \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{k}{\sqrt{x}} = 0$$

خاصية 2

إذا وجد مجال على شكل $]a; +\infty[$ بحيث
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ فان $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 0$ وكان $\forall x \in]a; +\infty[\quad |f(x)| \leq u(x)$

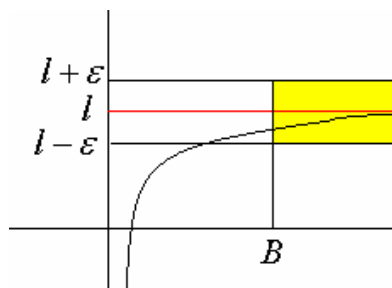
تمرين تطبيقي

أحسب $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{4x^2 + 3}$

حيث $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{x^2} = 0$ فان $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7}{4x^2 + 3} = 0$ ومنه $4x^2 + 3 > x^2$ و $\left| \frac{7}{4x^2 + 3} \right| \leq \frac{7}{x^2}$

2- النهاية l عند +∞

تعريف



لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]a; +\infty[$
 نقول إن $f(x)$ تتوّل إلى l عندما يؤوّل x إلى $+\infty$ إذا فقط
 إذا كان $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists B > 0 \quad x > B \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$
 نكتب $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$

مثال

بين أن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2}{x^2 + 1} = 1$

3- النهاية l عند -∞

تعريف

لتكن f يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $]-\infty; a[$
 نقول إن $f(x)$ تتوّل إلى l عندما يؤوّل x إلى $-\infty$ إذا فقط إذا كان $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x) = l$
 نكتب $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$

ملاحظات

- إذا كانت f زوجية فان $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$
 - إذا كانت f فردية فان $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = - \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

III- النهايات المنتهية والترتيب

خاصيات

خاصية 1

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط I مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ و f موجبة على I فإن $l \geq 0$

خاصية 2

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ بحيث $l \neq 0$ فإنه يوجد مجال مفتوح منقط J مركزه x_0 بحيث $\forall x \in J \quad f(x) \times l > 0$

خاصية 3

f و g دالتان معرفتان على مجال مفتوح منقط I مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l'$ و كان $f \geq g$ على I فإن $l \geq l'$

خاصية 4

f و g و h دوال معرفة على مجال مفتوح منقط I مركزه x_0
إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l$ وكان $f \geq h \geq g$ على I فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = l$

IV- العمليات على النهايات المنتهية

f و g دالتان لكل منهما نهاية منتهية في x_0 و λ عدد حقيقي
الدوال $f + g$ و λf و $f \times g$ و $|f|$ لها نهاية منتهية في x_0

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g)(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \times \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) & \lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| &= \left| \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right| & \lim_{x \rightarrow x_0} (\lambda \cdot f)(x) &= \lambda \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{f(x)} &= \sqrt{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)} & \text{إذا كانت } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) &\geq 0 \text{ فإن} \\ \lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g} \right)(x) &= \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)} & \text{إذا كان } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) &\neq 0 \text{ فإن} \end{aligned}$$

ملاحظة الخاصيات تبقى صالحة في $x_0 = -\infty$ و $x_0 = +\infty$

V- العمليات على الدوال المتصلة

خاصيات

- *- مجموع دالتين متصلتين في x_0 هي دالة متصلة في x_0
- *- جداء دالتين متصلتين في x_0 هي دالة متصلة في x_0
- *- جداء دالة متصلة في x_0 في عدد حقيقي هي دالة متصلة في x_0
- *- إذا كانتا f و g دالتين متصلتين في x_0 وكان $g(x_0) \neq 0$ فإن الدالتين $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلتان في x_0
- *- إذا كانت f موجبة على مجال مفتوح مركزه x_0 ومتصلة في x_0 فإن دالة \sqrt{f} متصلة في x_0
- *- إذا كانت f متصلة وكانت $x \rightarrow f(ax+b)$ دالة معرفة على مجال مفتوح مركزه x_0 فإن الدالة $x \rightarrow f(ax+b)$ متصلة في x_0

نتيجة

كل دالة جذرية متصلة على مجموعة تعريفها

تذكير الدالة الجذرية هي خارج دالتين حدوديتين

تمارين

$$-1 \text{ حدد } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - \sqrt{3x-2}}{x-2} ; \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x^2 + 5x - 2} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 5x + 2}{x^2 - 1} ; \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 6}$$

-2 أدرس اتصال الدوال

$$t(x) = \frac{2x^2 - 3x}{|x|} \quad \begin{cases} h(x) = 2x^2 - x & x > 1 \\ h(x) = -x^2 + 2 & x \leq 1 \end{cases} \quad g(x) = x^2 - 1 + \sqrt{x-2} \quad f(x) = \frac{2x^2 - 3x + 1}{x^2 - x}$$

VI - الدوال المثلثية

$$\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad |\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \quad \text{نقبل النتيجة}$$

-1 نهايات واتصال الدوال $x \rightarrow \sin x$ و $x \rightarrow \cos x$ و $x \rightarrow \tan x$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = 0 \quad \text{ومنه} \quad \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0 \quad \text{و} \quad \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad |\sin x| \leq |x| \quad \text{لدينا} *$$

إذن الدالة $x \rightarrow \sin x$ متصلة في 0 ومنه الدالة $x \rightarrow \sin(ax+b)$ متصلة في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \lim_{x \rightarrow 0} 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2} = 1 *$$

إذن $x \rightarrow \cos x$ متصلة في 0

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan x = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\cos x} = 0$$

$x \rightarrow \tan x$ متصلة في 0

* ليكن $x_0 \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \lim_{h \rightarrow 0} \sin(x_0 + h)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} [\sin x_0 \cosh + \sinh \cos x_0]$$

$$= \sin x_0 \cos 0 + \sin 0 \cos x_0 = \sin x_0$$

إذن دالة $x \rightarrow \sin x$ متصلة في x_0

خاصة

الدالتان $x \rightarrow \sin x$ و $x \rightarrow \cos x$ متصلتان في \mathbb{R}

الدالة $x \rightarrow \tan x$ متصلة في حيز تعريفها $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$

نتائج

الدالتان $x \rightarrow \sin(ax+b)$ و $x \rightarrow \cos(ax+b)$ متصلتان في \mathbb{R}

الدالة $x \rightarrow \tan(ax+b)$ متصلة في حيز تعريفها

-2 نهايات اعتيادية هامة

$$\text{نحدد } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x}$$

$$\text{لدينا } \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[\quad |\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \quad \text{ومنه} \quad \frac{1}{|\tan x|} \leq \frac{1}{|x|} \leq \frac{1}{|\sin x|} \quad \text{حيث } x \neq 0$$

$$\text{وبالتالي} \quad \frac{|\sin x|}{|\tan x|} \leq \frac{|\sin x|}{|x|} \leq \frac{|\sin x|}{|\sin x|} \quad \text{أي أن} \quad |\cos x| \leq \left| \frac{\sin x}{x} \right| \leq 1$$

$$\text{و حيث أن } \lim_{x \rightarrow 0} \cos x = 1 \quad \text{و} \quad x \quad \text{و} \quad \sin x \quad \text{لهما نفس الإشارة بجوار 0 فان} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} \times \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \times \frac{1}{\cos x} = 1 *$$

خاصية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan x}{x} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

نتيجة

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan ax}{ax} = 1 \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{ax} = 1$$

تمرين

حدد : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\sin 3x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{3x^2}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{4x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{3x}$; $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos 2x}{1 + \sin x}$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos 4x - \cos 2x}{\sin 4x + \sin 2x}$ ، $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\cos x - \sin x}{x - \frac{\pi}{4}}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x}$ ، $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 3x}{\sin 2x}$

VII- النهايات اللامنتهية

1- النهاية $+\infty$ أو $-\infty$ عند x_0

تمرين

$$f(x) = \frac{1}{|x|} \quad \text{نعتبر}$$

1- أنشئ C_f

2- أتمم الجدول التالي

x	10^{-100}	10^{-10^9}	$10^{-10^{12}}$	$10^{-10^{100}}$
$f(x)$				

ماذا تلاحظ (بين ذلك)

تعريف

* لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0) \quad (\exists \alpha > 0) \quad (\forall x \in D_f) \quad 0 < |x| < \alpha \Rightarrow f(x) > A$$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = +\infty$$

خاصية

لتكن f دالة معرفة على مجال مفتوح منقط مركزه x_0 .

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} -f(x) = +\infty$$

خاصية

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{|x^n|} = +\infty \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{\sqrt[n]{|x|}} = +\infty \quad n \in \mathbb{N}^* \quad ; \quad k \in \mathbb{R}^{+*} \quad \text{ليكن}$$

2- النهاية $+\infty$ أو $-\infty$ عند $+\infty$ أو $-\infty$

* لتكن f دالة معرفة على مجال من نوع $]a; +\infty[$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow (\forall A > 0) \quad (\exists B > 0) \quad \forall x \in D_f \quad x > B \Rightarrow f(x) > A$$

خاصية

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} -f(x) = +\infty$$

خاصية

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(-x)$$

النهايات والترتيب

* إذا كان لكل x من I ، $f(x) \geq u(x)$ و كان $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$

* إذا كان لكل x من I ، $f(x) \leq u(x)$ و كان $\lim_{x \rightarrow x_0} u(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$

ملاحظة

الخصائص السابقة تبقى صالحة عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ أو عند x_0 على اليمين أو عند x_0 على اليسار مع تعويض I على التوالي بالمجالات $]a; +\infty[$ و $]-\infty; a[$ و $]x_0; x_0 + \alpha[$ و $]x_0 - \alpha; x_0[$ ($\alpha > 0$)

VIII- العمليات على النهايات اللامنتهية

تعتبر دالتين f و g .

عند x_0 أو عند x_0 على اليمين أو عند $+\infty$ أو عند $-\infty$ تكون لدينا النتائج التالية:

أ- نهاية مجموع

نهاية f	نهاية g	نهاية $f + g$
$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$
$l \neq 0$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	شكل غير محدد

ب- نهاية جداء

نهاية f	نهاية g	نهاية $f \times g$
$l \neq 0$	$+\infty$	$+\infty$ مع وضع إشارة l
$l \neq 0$	$-\infty$	$-\infty$ مع وضع عكس إشارة l
0	$+\infty$	شكل غير محدد
0	$-\infty$	شكل غير محدد
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

ملاحظة:

لحساب نهاية $f \lambda$ حيث $\lambda \in \mathbb{R}$ يمكن اعتبار $f \lambda$ كجداء الدالة الثابتة $\lambda \rightarrow x$ التي نهايتها هي λ و الدالة f

ج- نهاية خارج

نهاية $\frac{f}{g}$	نهاية g	نهاية f
0	$+\infty$	l
0	$-\infty$	l
∞ مع وضع إشارة l	0^+	$l \neq 0$ حيث l
∞ مع وضع عكس إشارة l	0^-	$l \neq 0$ حيث l
شكل غير محدد	0	0
شكل غير محدد	$+\infty$	$+\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$-\infty$
شكل غير محدد	$-\infty$	$+\infty$
∞ مع وضع إشارة l	$l \neq 0$ حيث l	$+\infty$
∞ مع وضع عكس إشارة l	$l \neq 0$ حيث l	$-\infty$

د- نهاية \sqrt{f}

نهاية \sqrt{f}	نهاية f
$+\infty$	$+\infty$

IX- تطبيقات

1- دالة القوة الصحيحة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^n = +\infty \quad n \in \mathbb{N}^* \text{ ليكن}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = +\infty \text{ - إذا كان } n \text{ زوجي فان}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^n = -\infty \text{ - إذا كان } n \text{ فردي فان}$$

نتيجة

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{x^n} = 0 \quad n \in \mathbb{N}^* \text{ ليكن}$$

2- الدالة الحدودية

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

$$f(x) = a_n x^n \left(1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n \text{ فان } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \dots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n} \right] = 1 \text{ وحيث}$$

نهاية دالة حدودية عند ما يؤول x إلى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية حدها الأعلى درجة

أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^5 + 3x^2 - 5x + 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4x^5 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^7 + 7x^3 - x + 31 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -3x^7 = +\infty$$

3- الدالة الجدرية

نهاية دالة جدرية عند ما يؤول x الى $+\infty$ أو $-\infty$ هي نهاية خارج حديها الأكبر درجة

أمثلة

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^5 + 3x^2 - 5x + 1}{3x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x^5}{3x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4}{3} x^3 = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7 + 7x^3 - x + 31}{x^9 + 3x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^7}{x^9} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5 + 3x^2 - 5x + 1}{3x^5 - x^4 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{7x^5}{3x^5} = \frac{7}{3}$$

تمارين

حدد النهايات

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{2x^2 + x - 3} ; \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x + 1}{x^2 - 2x - 3}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x + 1} ; \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 6}{x - 2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 2}{x^2 - 3x + 2} ; \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^3} \right)$$

$$\lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 2} - x ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 2} + 3x}{2x - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+4} - 2}{x^2 - x} ; \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x^2 - 2}{\sqrt{x} - 1}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x+3} - 4}{x} ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x+1} - 4}$$