



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.



الصفحة

تمارين : اتصال دالة عددية

1. النهايات (تذكير)

نشاط 1 :

(1) أذكر بالأشكال الغير المحددة .

(2) أذكر ببعض خاصيات النهايات و الترتيب .

جواب :

(1) الأشكال الغير المحددة هي :

$$(1) (+\infty)+(-\infty) ; (-\infty)+(+\infty) (2) 0 \times (\pm\infty) (3) \frac{\pm\infty}{\pm\infty} (4) \frac{0}{0} (5) 0^0 (6) 1^\infty$$

(2) نذكر بعض خاصيات النهايات و الترتيب .

و f و g و h دوال عددية حيث :

▪ إذا كان $f(x) \leq g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow ?} g(x) = +\infty$

▪ إذا كان $f(x) \leq g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow ?} g(x) = -\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = -\infty$

▪ إذا كان $f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow ?} f(x) = \lim_{x \rightarrow ?} g(x) = \ell$ فإن $\lim_{x \rightarrow ?} h(x) = \ell$ (أو $x \rightarrow \pm\infty$ أو $x \rightarrow x_0$ أو $x \rightarrow x_0^\pm$)

نشاط 2 :

1. تمرين 1 :

الرسم التالي يمثل منحنى دالة f .

أ- حدد مبيانيا D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب- استنتج مبيانيا نهايات f عند محداث D_f و كذلك في 1.

2. تمرين 2 :

أحسب النهايات التالية : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^5 + 1)^3 (3x + 2)$ و

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x - \sqrt{4x^2 - 8x} \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-1}{|4-2x|} \text{ و } \lim_{x \rightarrow -\infty} x + |x+2|$$

3. تمرين 3 :

حدد a علما أن f لها نهاية في 3 حيث f معرفة كما يلي:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{x-3}{2-\sqrt{x+1}} ; x > 3 \\ f(x) = \frac{a}{x-1} ; x \leq 3 \end{cases}$$

4. تمرين 4 :

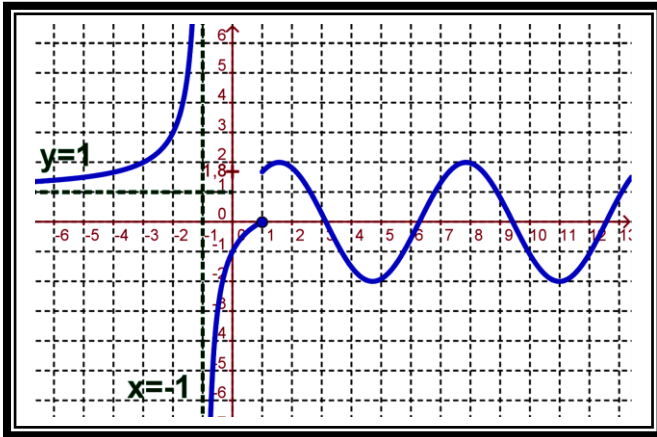
$$\text{أحسب : } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \cos x}{1+x^2} \text{ و } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$$

5. تمرين 5 :

لتكن f الدالة العددية المعرفة بما يلي : $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1-|x-1|}$

أ- حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .

ب- أحسب نهايات f عند محداث D_f .





درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.

2

الصفحة

تمارين : اتصال دالة عددية

II. اتصال دالة عددية في نقطة x_0 :

01. نشاط 1:

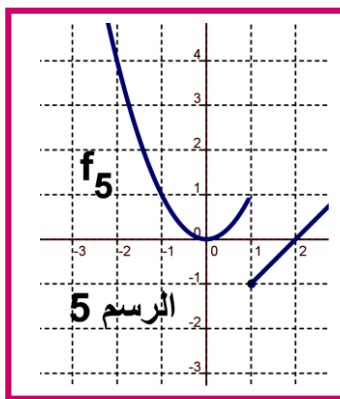
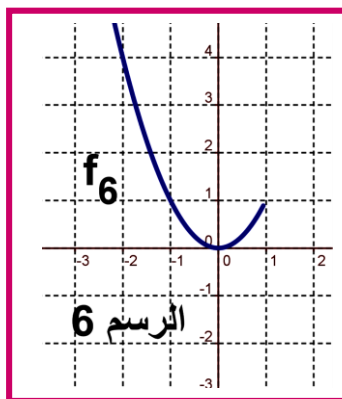
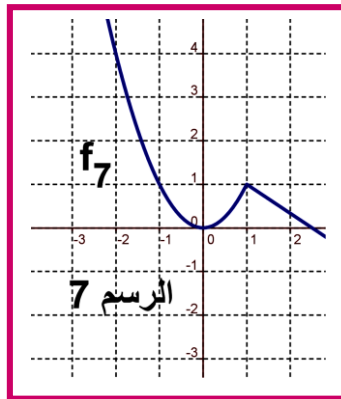
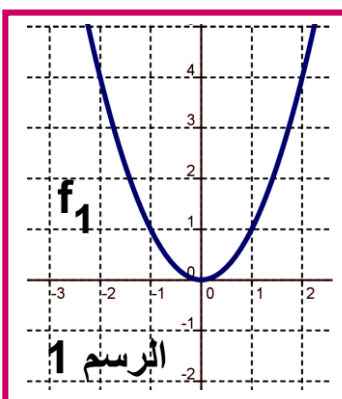
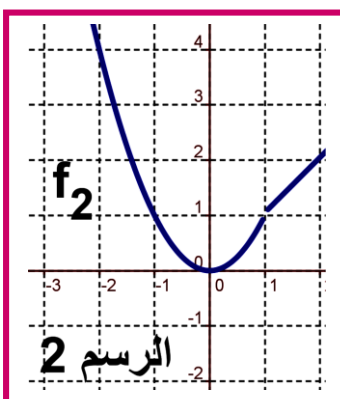
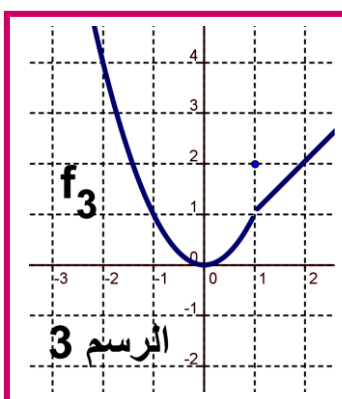
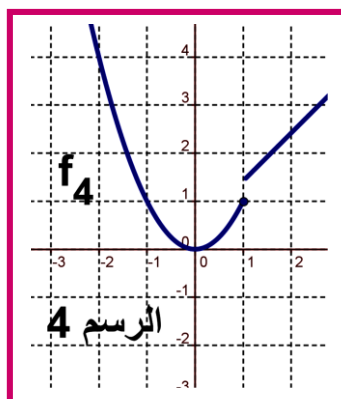
المنحنيات التالية تمثل الدوال f_i مع $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(1) نأخذ النقطة التي أفصولها $x_0 = 1$ ماذا تلاحظ ؟

(2) استنتج مبيانيا $\lim_{x \rightarrow 1} f_i(x)$ مع $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$

(3) الرسم 1 و 7 يمثلان دالتين متصلتين في النقطة $x_0 = 1$ وفي الحالات الأخرى غير متصلة في النقطة $x_0 = 1$.

(4) أعط تعريف لاتصال دالة في نقطة x_0 .



02. تعريف:

f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $I_{x_0} =]x_0 - r, x_0 + r[$ ($r > 0$) (معرفة على مجال مفتوح I و x_0 من I).

f متصلة في x_0 يكافئ: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

III. الاتصال على اليمين والاتصال على اليسار في نقطة x_0

01. تعريف 1-2:

f دالة عددية معرفة على $I_d = [x_0, x_0 + r[$ حيث $r > 0$. f متصل على يمين x_0 يكافئ: $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$.

f دالة عددية معرفة على $I_g =]x_0 - r, x_0]$ حيث $r > 0$. f متصل على يسار x_0 يكافئ: $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$.



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.



الصفحة

تمارين : اتصال دالة عددية

02. أمثلة:

نأخذ النشاط السابق أدرس مبيانيا اتصال بعض من f_i على يمين و يسار النقطة $x_0 = 1$ مع $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

03. خاصية:

دالة f متصلة في x_0 يكافئ f متصل على يسار و على يمين x_0 .

IV. التمديد بالاتصال في النقطة x_0 le prolongement par continuité

01. تذكير :

و F و G ثلاث مجموعات f و g دالتان عدديتان حيث : $f : E \rightarrow G$ و $g : F \rightarrow G$.
إذا كان $F \subset E$ و $\forall x \in F : f(x) = g(x)$.

• f تسمى تمديد (prolongement) لـ g . g تسمى قصور (restriction) لـ f على F . نكتب : $g = f|_F$.

01. تعريف و خاصية :

f دالة عددية يحتوي حيز تعريفها على مجال من نوع $I_{x_0}^* =]x_0 - r, x_0 + r[\setminus \{x_0\}$ مع $r > 0$. حيث :

• f غير معرفة في x_0

• $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$

الدالة g المعرفة بـ : $\begin{cases} g(x) = f(x) ; x \in D_f, x \neq x_0 \\ g(x_0) = \ell \end{cases}$ هي متصلة في x_0 .

الدالة g تسمى تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة x_0

02. مثال:

$f(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1}$ لدينا : $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$.

$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x|(|x| - 1)}{|x| - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} |x| = 1$

• وبالتالي الدالة g المعرفة بـ : $\begin{cases} g(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ g(1) = 1 \end{cases}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = 1$.

• كذلك الدالة h المعرفة بـ : $\begin{cases} h(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1} ; x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} \\ h(-1) = 1 \end{cases}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = -1$.



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.

4

الصفحة

تمارين : اتصال دالة عددية

- كذلك الدالة k المعرفة ب: $k(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1}$; $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ هي تمديد بالاتصال للدالة f في النقطة $x_0 = -1$ و في $x_0 = 1$.

ملحوظة: يمكن كتابة الدالة k على الشكل التالي: $k(x) = |x|$

V. اتصال دالة على مجال

01. تعاريف:

- f دالة متصلة على مجال مفتوح $I =]a; b[$ يكافئ f متصلة في كل نقطة x_0 من I .
- f دالة متصلة على مجال $I = [a, b]$ يكافئ: f متصلة على $]a, b[$ و متصلة على يمين a و متصلة على يسار b .
- f دالة متصلة على مجال $[a, +\infty[$ يكافئ: f متصلة في كل نقطة x_0 من $]a, +\infty[$ و f متصلة على يمين في a .

02. مثال:

لنعتبر الدالة: $f(x) = x^2 + 3x$.

بين أن: f متصلة على المجال المفتوح $I =]1; 5[$.

VI. اتصال الدوال الاعتيادية:

01. خاصية:

- كل دالة حدودية فهي متصلة على مجموعة تعريفها $D_f = \mathbb{R}$
- كل دالة جذرية فهي متصلة على مجموعة تعريفها D_f .
- $f(x) = \sin x$ و $f(x) = \cos x$ متصلتين على $D_f = \mathbb{R}$.
- الدالة: $f(x) = \tan x$ متصلة على $D_f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$
- الدالة: $f(x) = \sqrt{x}$ متصلة على مجموعة تعريفها $D_f = \mathbb{R}^+ = [0, +\infty[$.
- الدالة: $f(x) = |x|$ متصلة على مجموعة تعريفها $D_f = \mathbb{R}$.

VII. العمليات على الدوال المتصلة:

01. خاصية: (تقبل)

- I مجال ضمن المجموعة $\mathbb{R}$ ($I \subset \mathbb{R}$).
- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال I فإن الدوال: $f+g$ و $f \times g$ و αf ($\alpha \in \mathbb{R}$) متصلة على I .
- إذا كانت f و g دالتين متصلتين على المجال I و g لا تنعدم على المجال I فإن الدوال: $\frac{f}{g}$ و $\frac{1}{g}$ متصلة على I .

02. مثال:

لنعتبر الدوال التالية المعرفة ب: (1) $f(x) = \frac{2x+1}{x-1} + \cos(x)$ (2) $g(x) = (x^2 + 3x - 2) \times \sqrt{x}$

(1) حدد مجموعة تعريف واتصال كل دالة من الدوال السابقة.



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.



الصفحة

تمارين : اتصال دالة عددية

جواب

1 نحدد مجموعة تعريف:

الدالة $x \rightarrow \cos x$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}$. الدالة $x \rightarrow \frac{2x+1}{x-1}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$.

إذن الدالة $x \rightarrow \frac{2x+1}{x-1} + \cos x$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ $D_f = \mathbb{R} \cap (\mathbb{R} \setminus \{1\}) = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

الدالة $x \rightarrow x^2 + 3x - 2$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}$. الدالة $x \rightarrow \sqrt{x}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}^+$ $[0, +\infty[= \mathbb{R}^+$

إذن الدالة $x \rightarrow (x^2 + 3x - 2)\sqrt{x}$ معرفة ومتصلة على $\mathbb{R}^+$ $D_g = \mathbb{R} \cap \mathbb{R}^+ = \mathbb{R}^+$

VIII. اتصال مركبة دالتين متصلتين:

01. تذكر: $f(I) \subset J$ و $J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$ و $I \xrightarrow{f} f(I)$

$g \circ f : I \xrightarrow{f} f(I) \subset J \xrightarrow{g} \mathbb{R}$

$x \xrightarrow{f} f(x) \xrightarrow{g} g(f(x))$

01. خاصية:

لتكن f و g دالتين عدديتين.

- إذا كانت f متصلة في x_0 و الدالة g متصلة في $f(x_0)$ فإن الدالة $g \circ f$ متصلة في x_0 .
- إذا كانت f متصلة على مجال I و g متصلة على مجال J حيث: $f(I) \subset J$ فإن الدالة $g \circ f$ متصلة على I .

02. مثال: أدرس اتصال الدالة $f(x) = \sin(2x+1)$.

الدالة $x \rightarrow 2x+1$ متصلة على $\mathbb{R}$.

الدالة $x \rightarrow \sin x$ متصلة على $\mathbb{R}$ و $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. إذن الدالة: $x \rightarrow \sin(2x+1)$ متصلة على $\mathbb{R}$. (لأنها مركبة دالتين متصلتين)

03. نتائج:

• $f(x) = \sin(ax+b)$ و $g(x) = \cos(ax+b)$ دالتان متصلتان على $\mathbb{R}$.

• الدالة $h(x) = \tan(ax+b)$ متصلة في كل x تحقق ما يلي $ax+b \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$.

• f دالة موجبة و متصلة على المجال I فإن الدالة $x \mapsto \sqrt{f(x)}$ متصلة على I .

IX. دالة الجزء الصحيح :

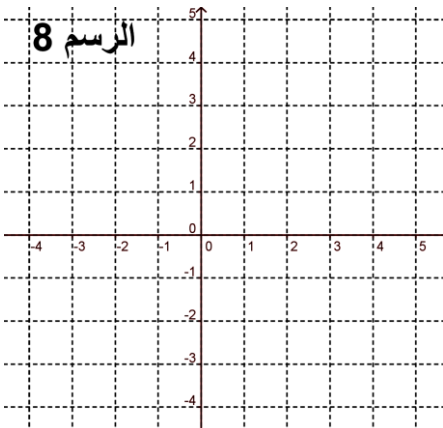
01. تعريف: (تذكر)

الدالة f التي تربط كل عنصر x من $\mathbb{R}$ بالعدد الصحيح النسبي الوحيد p الذي يحقق $p \leq x < p+1$ تسمى الدالة الجزء الصحيح ويرمز لها بـ E أو أيضا $[x]$ نكتب $f(x) = E(x) = p$ أو $f(x) = [x] = p$

02. نشاط:

1 أنشئ منحنى الدالة $f(x) = E(x)$.

2 هل f متصلة على يمين في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2.





درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ ع. ح. أ.



الصفحة

تمارين : اتصال دالة عددية

(3) هل f متصلة على يسار في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2 .

(4) هل f متصلة في 0 و 1 و 2 و 3 و -1 و -2

(5) هل f متصلة على $[0;1[$ و $[1;2[$ و $[2;3[$

(6) أعط الخاصية.

03.خاصية:

دالة الجزء الصحيح متصلة على اليمين p وغير متصلة على اليسار p (إنه غير متصلة في p).

دالة الجزء الصحيح متصلة على كل المجالات التي هي على شكل: $[p, p+1[$ (مع $p \in \mathbb{Z}$)

X. صورة مجال بدالة متصلة :

01.نشاط:

نأخذ النشاط أول الدرس و الرسم رقم 1 الذي يمثل الدالة: $f(x) = x^2$

(1) استنتج مبيانيا صور جميع الأعداد التي تنتمي إلى القطعة $[0, 2]$

(2) استنتج مبيانيا : $f([-1, 0])$ و $f([-1, 2])$. أعط الخاصية.

02.خاصية:

صورة قطعة $[a, b]$ بدالة متصلة f هي قطعة (تكون على شكل $[m, M]$ مع m و M هي القيمة الدنيا والقيمة القصوى على

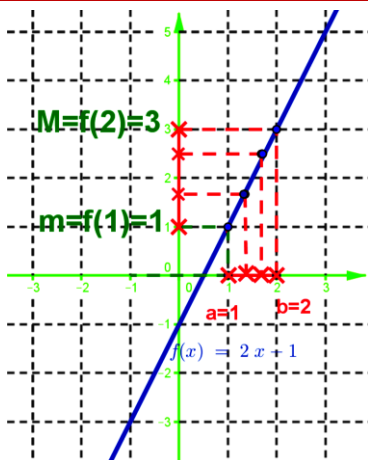
التوالي ل f على المجال $[a, b]$). (أو أيضا : $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ و $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$)

صورة مجال I بدالة متصلة f هي مجال $J = f(I)$.

ملاحظة : $f([a, b]) = [m, M]$

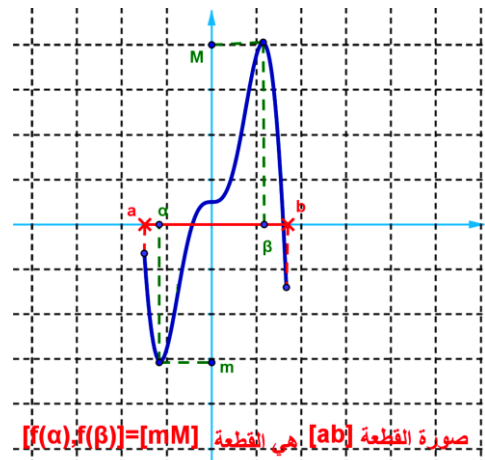
مثال : 2 $f(x) = 2x - 1$ لدينا مبيانيا : $f([1, 2]) = [1, 3]$

$f([1, 2[) = [1, 3[$



مثال : 1 $m = \min_{a \leq x \leq b} f(x)$ و $M = \max_{a \leq x \leq b} f(x)$

نضع : $M = f(\beta)$ و $m = f(\alpha)$ $\exists (\alpha, \beta) \in I^2$



XI. مبرهنة القيم الوسيطة: théorème des valeurs intermédiaires

01.نشاط:

5:32 2015-10-05



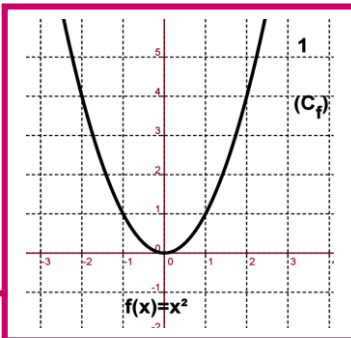
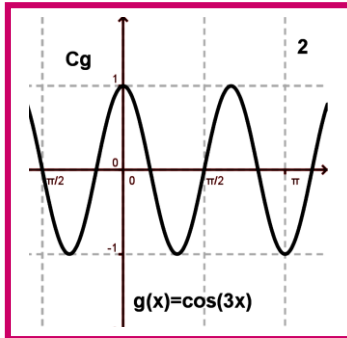
درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ ع. ح. أ.



الصفحة

تمارين : اتصال دالة عددية



نأخذ $a = 1$ و $b = -2$ في الرسم 1؛ $a = 0$ و $b = \pi$ (الرسم 2)

(1) استنتج مبيانيا $f(a)$ و $f(b)$. (الرسم 1)

(2) نأخذ عدد k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ هل يوجد على الأقل

عنصر c من $[a, b] = [-2, 1]$ حيث $f(c) = k$. (الرسم 1)

(3) أعط الخاصية:

02. خاصية:

f دالة متصلة على القطعة $[a, b]$.

■ لكل عدد حقيقي k محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد على الأقل عنصر c من $[a, b]$ حيث $f(c) = k$.

03. نتائج:

■ بما أن : صورة قطعة $[a, b]$ بدالة متصلة هي القطعة $[m, M]$ إذن : $f([a, b]) = [m, M]$.

■ إذا كان : $f(a)f(b) < 0$ أي $f(a)$ و $f(b)$ (احدهما موجب و الآخر سالب) ومنه : $f([a, b]) = [m, M]$ و $k = 0 \in [m, M]$ ومنه يوجد

عنصر c من $[a, b]$ حيث : $f(c) = 0$.

■ نتيجة ل ($f(a) \times f(b) < 0$) : المعادلة : $f(x) = 0$ تقبل على الأقل حل على $[a, b]$.

XII. دالة متصلة ورتبية قطعا:

01. نشاط: f دالة متصلة ورتبية قطعا. لدينا صور المجالات الآتية

المجال I	f متصلة و تزايدية قطعا نحدد : المجال $f(I)$	f متصلة و تناقصية قطعا نحدد : المجال $f(I)$
$[a, b]$	$[f(a), f(b)]$	$[f(b), f(a)]$
$[a, b[$	$[f(a), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$[\lim_{x \rightarrow b^-} f(x), f(a)]$
$]a, b]$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), f(b)]$	$[f(b), \lim_{x \rightarrow a^+} f(x)[$
$]a, b[$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x), \lim_{x \rightarrow b^-} f(x)[$
$[a, +\infty[$	$[f(a), +\infty[$	$[f(b), +\infty[$
$]-\infty, a]$	$]-\infty, f(a)]$	$]-\infty, f(b)]$
$]-\infty, a[$	$]-\infty, \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)[$	$[\lim_{x \rightarrow a^-} f(x), -\infty[$
$]-\infty, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$	$]-\infty, +\infty[$

XIII. الدالة العكسية لدالة متصلة ورتبية على قطعا على مجال:

A. تقابل دالة عددية - التقابل العكسي لدالة :

01. تعريف:

f دالة عددية من I نحو J . $(f : I \rightarrow J)$.

• f تسمى دالة تقابل من I نحو J يعني كل عنصر x من I له صورة وحيدة y من J و كل عنصر y من J له سابقا وحيدا x من I

• الدالة g من J نحو I التي تربط كل عنصر y من J بالعنصر الوحيد x من I حيث $f(x) = y$ تسمى الدالة العكسية ل f :

و يرمز له ب: $g = f^{-1}$. (أي $f^{-1} : J \rightarrow I$)



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.



الصفحة

تمارين : اتصال دالة عددية

02. مثال :

- نعتبر الدالة العددية $f(x) = x$ هل الدالة تقابل من $\mathbb{R}$ إلى $\mathbb{R}$.
- هل كل عنصر x من مجموعة الانطلاق $\mathbb{R}$ له صورة وحيدة من مجموعة الوصول $\mathbb{R}$.
- هل كل عنصر y من مجموعة الوصول $\mathbb{R}$ له سابق وحيد من مجموعة الانطلاق $\mathbb{R}$.
- ماذا نستنتج ؟

03. ملحوظة:

- الدالة العكسي f^{-1} تكتب على الشكل التالي :
 $f^{-1} : J \rightarrow I$ أو أيضا : $x \mapsto f^{-1}(x)$ و $y \mapsto f^{-1}(y)$
 وذلك باستعمال المتغير x بدل من y
- العلاقة التي تربط f و f^{-1} هي :

$$\left. \begin{array}{l} x = f(x) \\ x \in I \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left. \begin{array}{l} f^{-1}(y) = x \\ y \in J \end{array} \right\}$$
- لكي نبرهن على أن دالة f معرفة من I نحو J بأنها تقابل من I إلى J نبين أن المعادلة $x \in I : f(x) = y$ لها حل وحيد مع y من J .

04. مثال :

نعتبر الدالة العددية $f(x) = x^2$ على $I = [0; +\infty[$

1. استنتج مبيانيا $J = f(I)$ (أي صورة المجال I ب f).

2. هل لكل عنصر y من $J = f(I)$ له سابق وحيد c من I . استنتج طبيعة التطبيق f .

3. نعتبر المعادلة : $x \in I = [0; +\infty[/ f(x) = y$ مع y معلوم من J .

أ- أوجد عدد حلول المعادلة (E) .

ب- استنتج الدالة العكسية f^{-1} ل f .

05. خاصية :

f دالة عددية متصلة ورتبية قطعاً على مجال I و $y \in f(I)$.

• الدالة f هي تقابل من I إلى $f(I)$.

• ليكن y من $f(I)$ المعادلة : $x \in I / f(x) = y$ تقبل حل وحيد على I .

02. نتيجة :

إذا كانت f دالة متصلة ورتبية قطعاً على المجال $[a, b]$.

- فإنه لكل عدد محصور بين $f(a)$ و $f(b)$ يوجد عدد وحيد c من $[a, b]$ حيث : $f(c) = k$.
- إذا كان $f(a) \times f(b) < 0$ المعادلة $f(x) = 0$ تقبل حل وحيد.

06. ملاحظة:

- الدالة f معرفة كما يلي: $f : I \rightarrow J = f(I)$
 $x \rightarrow f(x) = y$
 الدالة f^{-1} معرفة كما يلي: $f^{-1} : J = f(I) \rightarrow I$
 $y \rightarrow f^{-1}(y) = x$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.



الصفحة

تمارين : اتصال دالة عددية

- $f(x) = y \Leftrightarrow \begin{cases} f^{-1}(y) = x \\ x \in I \end{cases} \begin{cases} y \in J \end{cases}$
- $\forall y \in J : f \circ f^{-1}(y) = y . \forall x \in I : f^{-1} \circ f(x) = x$
- ويمكن كتابة $\forall y \in J : f \circ f^{-1}(y) = y$ كذلك على الشكل التالي : $\forall x \in J : f \circ f^{-1}(x) = x$

07. خاصيات الدالة العكسية: (تقبل)

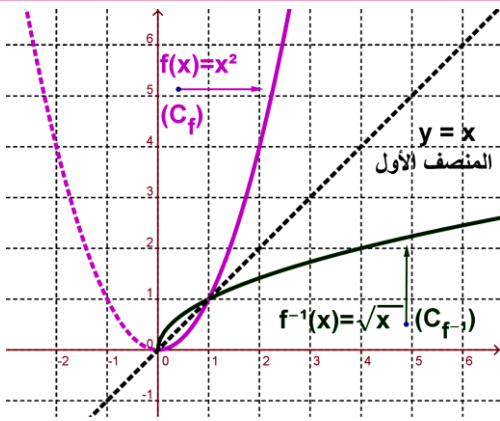
f دالة عددية متصلة و رتيبة قطعاً على مجال I و $J = f(I)$ الدالة العكسية ل f .

1. الدالة f^{-1} متصلة على المجال $J = f(I)$. (تقبل)

2. الدالة f^{-1} رتيبة قطعاً على المجال J و لها نفس رتبة f على I .

3. $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1} و (C_f) منحنى الدالة f متماثلان بالنسبة للمستقيم (D) الذي معادلته $y = x$ في معلم متعامد

منظم (المستقيم (D) يسمى المنصف الأول)



07. مثال: لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = x^2$

(1) أ - مبيانيا هل f متصلة على $I = [0; +\infty[$

ب - استنتج رتبة f على I .

ج - حدد : $J = f(I)$.

د - هل f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال يجب تحديده.

(2) حدد: f^{-1} . (C_f) منحنى الدالة f . $(C_{f^{-1}})$ منحنى الدالة f^{-1}

08. مفردات:

الدالة العكسية f^{-1} المحصل عليها تسمى كذلك الجذر من الرتبة 2. و نرمز لها ب: $f^{-1} = \sqrt{\quad}$ أو باختصار : $f^{-1} = \sqrt{\quad}$

XIV. دالة الجذر من الرتبة n

01. نشاط:

$n \in \mathbb{N}^*$. لنعتبر الدالة $f(x) = x^n$ على المجال $I = [0; +\infty[$

بين أن الدالة f تقبل دالة عكسية f^{-1} على المجال J حدده .

02. مفردات:

- الدالة العكسية f^{-1} تسمى الدالة الجذر من الرتبة n .
- الدالة العكسية f^{-1} يرمز لها ب: $f^{-1} = \sqrt[n]{\quad}$.
- نكتب: $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ أو أيضا $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$.
- حالة $n = 1$: لدينا $f^{-1}(x) = \sqrt[1]{x} = x$ (حالة غير مهمة).
- حالة $n = 2$: لدينا $f^{-1}(x) = \sqrt[2]{x} = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ (الدالة تسمى باختصار الجذر المربع)



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.

10

الصفحة

تمارين : اتصال دالة عددية

■ حالة : $n = 3$ لدينا $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$ (الدالة تسمى باختصار الجذر المكعب أو الجذر الثالث).

03. تعريف وخاصية:

n عدد صحيح طبيعي غير منعدم.

- الدالة $f(x) = x^n$ متصلة و تزايدية قطعاً على $I = [0; +\infty[$.
- f تقابل من I إلى $J = f(I) = [0; +\infty[$ و دالتها العكسية f^{-1} تسمى الدالة الجذر من الرتبة n و نرمز لها: $f^{-1} = \sqrt[n]{}$
- نكتب : $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ أو أيضاً : $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{n}}$
- العدد: $\sqrt[n]{a}$ يسمى الجذر من الرتبة n للعدد الحقيقي الموجب a .

04. خاصية:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$. $\forall x \geq 0$; $(\sqrt[n]{x})^n = x$ و $\sqrt[n]{x^n} = x$. $\sqrt[n]{1} = 1$; $\sqrt[n]{0} = 0$
- منحنى $(C_{f^{-1}})$ لدالة $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ هو مماثل (C_f) منحنى الدالة $f(x) = x^n$ بالنسبة للمنصف الأول في معلم متعامد ممنظم (المنصف الأول هو المستقيم (D) الذي معادلته $y = x$: (D)).

05. نتائج:

- $\forall a \in \mathbb{R}^+ ; \forall b \in \mathbb{R}^+ ; \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a = b$
- $\forall a \in \mathbb{R}^+ ; \forall b \in \mathbb{R}^+ ; \sqrt[n]{a} \leq \sqrt[n]{b} \Leftrightarrow a \leq b$

XV. العمليات على الجذور من الرتبة n .

01. خاصيات:

- $a \geq 0$ و $b \geq 0$ و n و m من $\mathbb{N}^*$
- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$
- $(b > 0) ; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ و $(b > 0) ; \sqrt[n]{\frac{1}{b}} = \frac{1}{\sqrt[n]{b}}$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[n \times m]{a} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}}$ و $\sqrt[n \times m]{a^m} = \sqrt[n]{a}$

02. مثال :

بسط: $\sqrt[5]{3\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}}$
لدينا : $\sqrt[5]{3\sqrt[3]{81}} \times \sqrt[15]{3^{11}} = \sqrt[3 \times 5]{81} \times \sqrt[15]{3^{11}}$



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ ع. ح. أ.

11

الصفحة

تمارين : اتصال دالة عددية

$$= \sqrt[15]{3^4 \times 3^{11}}$$

$$= \sqrt[15]{3^{15}} = 3$$

$$\sqrt[5]{3 \times 81} \times \sqrt[15]{3^{11}} = 3 \quad \text{خلاصة :}$$

XVI. بعض خاصيات الدوال التي هي على شكل: $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$.

01. خاصيات (تقبل)

f دالة عددية موجبة على مجال I. n من $\mathbb{N}^*$.

▪ إذا كانت f (x) متصلة على I فإن $g(x) = \sqrt[n]{f(x)}$ متصلة على I.

▪ إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \ell$ و $\ell \geq 0$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\ell}$.

▪ إذا كان $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = +\infty$ فإن $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt[n]{f(x)} = +\infty$.

▪ تبقى الخاصيات صحيحة إذا كان: $x \rightarrow x_0^-$; $x \rightarrow x_0^+$; $x \rightarrow \pm\infty$.

02. تمرين تطبيقي :

لنعتبر الدالة f المعرفة ب: $f(x) = \sqrt[4]{x+1}$.

(1) حدد D_f مجموعة تعريف f.

(2) أحسب: $f(-1)$; $f(15)$; $f(0)$.

(3) أحسب: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

XVII. القوى الجذرية لعدد حقيقي موجب قطعاً:

01. تعريف :

$r = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}^*$ (مع $n \in \mathbb{N}^*$ و $m \in \mathbb{Z}$) و $x \in \mathbb{R}^{+*}$.

الكتابة $\sqrt[n]{x^m}$ نرمز لها ب: $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$ أو أيضاً ب: $\sqrt[n]{x^m} = x^r$ أما x^r يسمى القوة الجذرية للعدد x ذات الأس r.

$$x^r = x^{\frac{m}{n}} = (\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m} \quad \square$$

02. أمثلة :

(1) مثال 1 : أكتب على شكل x^r ما يلي: $(\sqrt[5]{3})^{-32}$ و $\sqrt[13]{2^{-15}}$ و $(\sqrt[9]{21})^{-11}$ و $\sqrt[8]{3^5}$ و $(\sqrt[9]{7})^{11}$.

(2) مثال 2 : أكتب بطريقة أخرى الأعداد التالية: $\sqrt[3]{8}$; $\sqrt[5]{11}$; $\sqrt[7]{3}$; $\sqrt[4]{3^{-5}}$; $\sqrt[4]{3^5}$.

03. ملاحظة:

• تعريف الأس في $\mathbb{Q}$ هو تمديد لتعريف الأس في $\mathbb{Z}$.

• لدينا: $\sqrt[n]{a^1} = \sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$, $\forall a > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. يمان: $\sqrt[n]{0} = 0$ يمكن أن نصطلح أن: $0^{\frac{1}{n}} = 0$.



درس رقم

الأستاذ: بنموسى محمد ثانوية: عمر بن عبد العزيز المستوى: 2 علوم فيزياء+ع. ح. أ.

12

الصفحة

تمارين : اتصال دالة عددية

لنعتبر الدالة العددية f المعرفة كما يلي : $(x) = \frac{\sqrt[4]{x+1}-1}{x}$

1. حدد D_f مجموعة تعريف الدالة f .
2. بين أنه يمكن تمديد بالاتصال الدالة f في 0.
3. أحسب : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

04. خاصيات القوى الجذرية :

x و y من $\mathbb{R}^{+*}$ و r و r' من $\mathbb{Q}^*$. لدينا :

- $x^r > 0$
- $x^r = x^{r'} \Leftrightarrow r = r'$
- $x^r \times y^r = (x \times y)^r$ و $x^r \times x^{r'} = x^{r+r'}$
- $\frac{x^r}{x^{r'}} = x^{r-r'}$ و $(x^r)^{r'} = x^{r \times r'}$ و $x^{-r} = \frac{1}{x^r}$ و $\left(\frac{x}{y}\right)^r = \frac{x^r}{y^r}$

05. مثال: بسط ما يلي.

$$A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right) \quad (1)$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} \quad (2)$$

جواب :

$$A = \left(2^{-\frac{1}{3}}\right)^5 \times \left(4^{-\frac{1}{2}}\right) \times \left(8^{\frac{2}{3}}\right) = (2)^{-\frac{5}{3}} \times (2^2)^{-\frac{1}{2}} \times (2^3)^{\frac{2}{3}} = (2)^{-\frac{5}{3}} \times (2^{-1}) \times (2^2) = (2)^{-\frac{5}{3}-1+2} = 2^{-\frac{2}{3}}$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{7} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = \frac{7^{\frac{1}{3}} \times 7^{\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = \frac{7^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}}{7^{-\frac{1}{4}}} = 7^{1+\frac{1}{4}} = 7^{\frac{5}{4}}$$