

تصحيح الإمتحان الوطني 2014

الرياضيات

عناصر الإجابة :

تمرين 1 : (3 نقط)

$$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & -1 & 0 \\ \vec{j} & 0 & 2 \\ \vec{k} & -1 & -1 \end{vmatrix} \quad \text{إذن :} \quad \overline{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \quad \overline{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{لدينا : 1} \\ = \vec{i} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} \\ = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

بما أن : $\overline{AB} \wedge \overline{AC} \neq \vec{0}$ فإن A و B و C نقط غير مستقيمة

ب) لدينا (ABC) هو المستوى المار من A والتجهة $\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ منتظمة له .

$$M(x; y; z) \in (ABC) \Leftrightarrow \overline{AM} \cdot (\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = 0 \quad \text{إذن}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y-3 \\ z-1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$$

$$2x - y - 2z + 5 = 0$$

أو النقط A و B و C تحقق المعادلة $2x - y - 2z + 5 = 0$ (إذن هي معادلة المستوى (ABC))

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + y^2 + z^2 = 9 = 3^2 \quad \text{لدينا : 2} \quad \text{أ)}$$

إذن : (S) هي الكرة التي مركزها $\Omega(2; 0; 0)$ وشعاعها $R = 3$

$$d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 2 - 0 - 0 + 5|}{\sqrt{4+1+4}} = 3 \quad \text{لدينا : 3} \quad \text{ب)}$$

ج) لدينا $H(c, b, a)$ الإسقط العمودي لـ Ω على (ABC) (إذن H هي تقاطع (ABC) والمستقيم المار من Ω و العمودي على (ABC))

$$\exists t \in \mathbb{R} / a = 2 + 2t ; b = -t ; c = -2t \quad \text{و} \quad 2a - b - 2c + 5 = 0 \Leftrightarrow t = -1 \quad \text{إذن :}$$

إذن $H(0; 1; 2)$.

تمرين 2 : (3 نقطة)

1) لدينا : $z^2 - \sqrt{2}z + 2 = 0 \Leftrightarrow (z - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 + \frac{3}{2} = 0$ لأن : $z^2 - \sqrt{2}z = (z - \frac{\sqrt{2}}{2})^2 - \frac{1}{2}$

$$\Leftrightarrow z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i \text{ أو } z = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i$$

وبالتالي $S = \{ \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}i , \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}i \}$

2) لدينا : $u = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{6}}{2} = \sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)$

ومنه $|u| = \sqrt{2} ; \arg u = \frac{\pi}{3} [2\pi]$

ب) لدينا : $u = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{3} \right] \Rightarrow u^6 = \left[\sqrt{2}; \frac{\pi}{3} \right]^6 \Rightarrow u^6 = \left[(\sqrt{2})^6; \frac{6\pi}{3} \right] \Rightarrow u^6 = [16; 2\pi] \Rightarrow u^6 = 16$

ومنه $u^6 \in \mathbb{R}$

3) لدينا : $R(O, \frac{\pi}{3})[z]M = [(z)M'] \Leftrightarrow z - z_0 = (z - z_0) \times e^{i\frac{\pi}{3}}$

$$\Leftrightarrow z = z' \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$$

ب) لدينا : $z_A \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = (4 - 4\sqrt{3}i) \times \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right)$

$$= \left(4 \times \frac{1}{2} + 4\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \right) + i \left(4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} - 4\sqrt{3} \times \frac{1}{2} \right)$$

$$= 8 = z_B$$

ومنه : $R(O, \frac{\pi}{3})[B] = [A]$

لدينا : $R(O, \frac{\pi}{3})[B] = [A] \Rightarrow \frac{z_B - z_O}{z_A - z_O} = \left[1; \frac{\pi}{3} \right]$

إذن OAB مثلث متساوي الأضلاع .

تمرين 3 : (3 نقطة)

1) من أجل $n=0$ لدينا : $U_0 = 13$ و $13 < 14$ إذن الخاصية تتحقق

ليكن n من $\mathbb{N}$ نفترض أن $U_n < 14$ لنبين أن $U_{n+1} < 14$

لدينا : $U_n < 14 \Rightarrow \frac{1}{2}U_n + 7 < \frac{14}{2} + 7$

$$\Rightarrow U_{n+1} < 14$$

إذن : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n < 14$

2 ﴿أُذِئْبُنَا﴾

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N}: V_{n+1} &= 14 - U_{n+1} \\ &= 14 - \frac{1}{2}U_n - 7 \\ &= 7 - \frac{1}{2}U_n \\ &= \frac{1}{2}(14 - U_n) = \frac{1}{2}V_n\end{aligned}$$

لنكون (V_n) متتالية أساسية $\frac{1}{2}$ وجميعها الأولى $V_0 = 1$ ومنه $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n$

$$\forall n \in \mathbb{N} : V_n = 14 - U_n \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : U_n = 14 - V_n$$

بے لکھنا : $\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} : U_n = 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$

وبما ان : $-1 < \frac{1}{2} < 1$ فإن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ وبالتالي : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 14$

$$U_n > 13.99 \Leftrightarrow 14 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 13.99 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^n < 14 - 13.99$$

چہ لڑینا :

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{2}\right)^n < \ln(0.01) \Leftrightarrow -n\ln 2 < -2\ln 10 \Leftrightarrow n > \frac{2\ln 10}{\ln 2}$$

ولدينا: $\frac{2\ln 10}{\ln 2} \simeq 6.67$ إذن $n = 7$.

تمرين 4 : (3 نقطة)

1) كل إمكانية عبارة عن تاليفة لعنصرين من بين تسع عناصر وعدها هو $C_9^2 = 36$

$$P(A) = \frac{C_4^1 \times C_5^1}{C_9^2} = \frac{20}{36} = \frac{5}{9}$$
 لدينا " 10 " فون

2) نعتبر الحدث " يفوز سعيد " G (فون " 11 " G ومنه $p(G) = \frac{C_4^2}{C_9^2} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

بـ نعتبر المثلث " يفوز سعيد مرتين بالضبط " B'' (فإن " 3 حالات $\leftarrow G/G/\overline{G}$ " B

$$p(B) = C_3^2 \left(\frac{1}{6}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{6}\right) = \frac{5}{72} : \text{ومنه}$$

مسألة : (8 نقطة)

الجزء الأول :

1) لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : g'(x) = \frac{2x}{x^4} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x^3} + \frac{1}{x}$

وبما أن : $x > 0$ فإن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : g'(x) > 0$ ومنه g تزايدية قطعا على $\mathbb{R}_+^*$

2) لدينا $g(1) = 1 - 1 + \ln 1 = 0$ وحيث أن g تزايدية على $\mathbb{R}_+^*$ فإن :

$x \geq 1 \Rightarrow g(x) \geq g(1) \Rightarrow g(x) \geq 0$ و $0 < x \leq 1 \Rightarrow g(x) \leq g(1) \Rightarrow g(x) \leq 0$
إذن :

x	0	1	$+\infty$
إشارة $g(x)$	-	0	+

الجزء الثاني : 1) لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

إذن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ومنه (ζ_f) يقبل مقاربا عموديا معاولته $x = 0$

2) لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$ إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$

ب. لدينا :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln(t^2))^2}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 2\ln(t^2) + (\ln(t^2))^2}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1 + 4\ln(t) + 4(\ln(t))^2}{t^2} \\ &= \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{t^2} + 4\frac{\ln(t)}{t^2} + 4\frac{(\ln(t))^2}{t^2} \right) \end{aligned}$$

وبما أن : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t^2} = 0$ و $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln(t)}{t^2} = 0$ و $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{(\ln(t))^2}{t^2} = 0$ إذن $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \ln x)^2}{x} = 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{(1+\ln x)^2}{x} + \frac{1}{x^3} \right) = 0 \quad \text{إذن :}$$

جـ لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ (إذن (ζ_f) يقبل فرعاً شلجيمياً في اتجاه محور الأفاصيل بحد $+\infty$)

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f'(x) = \frac{2(1+\ln x)}{x} - \frac{2}{x^3} = \frac{2}{x} \left(1 + \ln x - \frac{2}{x^2} \right)$$

$$= \frac{2g(x)}{x}$$

ومنه إشارة $f'(x)$ هي إشارة $g(x)$ على $\mathbb{R}_+^*$

ولدينا :

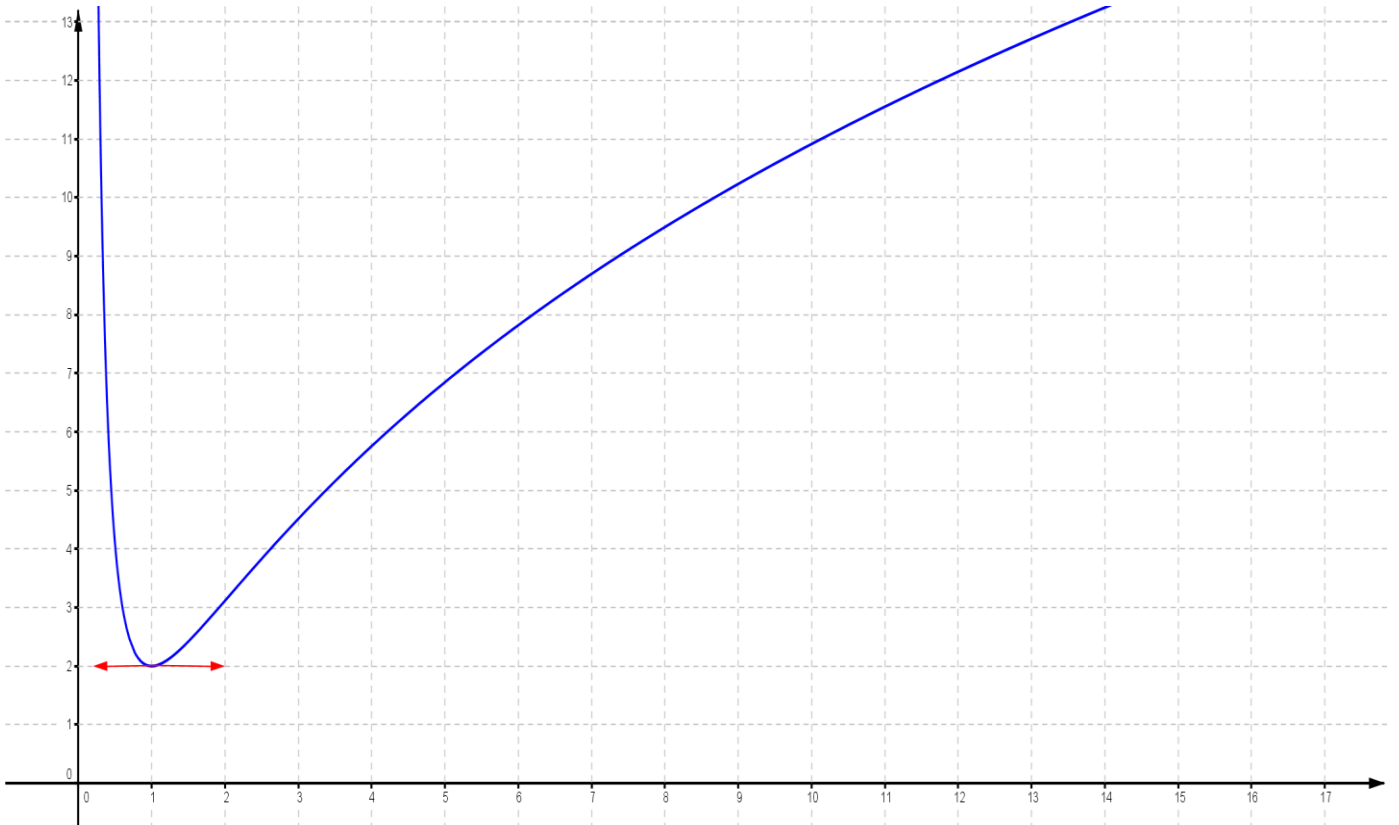
x	0	1	$+\infty$
إشارة $g(x)$	-	0	+

بـ لدينا :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$-\infty$	2	$+\infty$

لدينا 2 قيمة ونياً مطلقة للدالة f (إذن $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : f(x) \geq 2$)

4 إنشاء (ζ_f) :



5. أ. لدينا : $\forall x \in \mathbb{R}_+^* : H'(x) = \ln x + 1$

$$I = \int_1^e (1 + \ln x) dx = H(e) - H(1) = e \quad \text{إذن :}$$

$$\begin{cases} u(x) = (1 + \ln x)^2 \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{2(1 + \ln x)}{x} \\ v(x) = x \end{cases} \quad \text{ب. نضع :}$$

$$J = \left[x(1 + \ln x)^2 \right]_1^e - 2 \int_1^e (1 + \ln x) dx \quad \text{إذن :}$$

$$= 4e - 1 - 2e = 2e - 1$$

$$A(f) = \int_1^e |f(x)| dx \times 1 \text{ cm}^2 = \left(J - \left[\frac{1}{x} \right]_1^e \right) \text{ cm}^2 = \frac{2e^2 - 1}{e} \text{ cm}^2 \quad \text{ج. لدينا :}$$