

أجوبة امتحان الدورة الإستدراكية 2012

التمرين الأول:

1 أ

لدينا : $\begin{cases} A(-3,0,0) \\ B(0,0,-3) \\ C(0,2,-2) \end{cases}$ إذن : $\begin{cases} \overrightarrow{AB}(3,0,-3) \\ \overrightarrow{AC}(3,2,-2) \end{cases}$

و منه : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \vec{k} = 6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k}$

إذن : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = (6\vec{i} - 3\vec{j} + 6\vec{k})$ ونعلم أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ متجهة منظمية على (ABC) .
لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من المستوى (ABC) .
بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC) .
فإن المتجهتان $\overrightarrow{AM}$ و $(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$ متعامدتان .

يعني : $\overrightarrow{AM} \cdot (\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}) = 0$

يعني : $\begin{pmatrix} x+3 \\ y \\ z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix} = 0$

يعني : $6(x+3) - 3y + 6z = 0$

يعني : $2x - y + 2z + 6 = 0$

و هذه الكتابة الأخيرة هي معادلة ديكارتية للمستوى (ABC) .

1 ب

لدينا : $\begin{cases} (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \\ \Omega(1,1,1) \end{cases}$

إذن : $d(\Omega, (ABC)) = \frac{|2 \times 1 - 1 + 2 \times 1 + 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 2^2}} = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3$

نلاحظ إذن أن : $d(\Omega, (ABC)) = 3 = \text{Rayon}(\mathcal{S})$
إذن : المستوى (ABC) مماس للكرة $(\mathcal{S})$ في نقطة $H(\alpha, \beta, \gamma)$.

2 أ

لتكن $M(x, y, z)$ نقطة من المستقيم (D) . لدينا $\begin{cases} (D) \perp (ABC) \\ \Omega \in (D) \end{cases}$

بما أن المتجهة $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ منظمية على المستوى (ABC)
فإن المتجهتان $\overrightarrow{\Omega M}$ و $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ مستقيمتان .
يعني : $(\exists \theta \in \mathbb{R}) ; \overrightarrow{\Omega M} = \theta(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC})$

يعني : $(\exists \theta \in \mathbb{R}) ; \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} = \theta \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 6 \end{pmatrix}$

يعني : $(D) : \begin{cases} x-1 = 6\theta \\ y-1 = -3\theta \\ z-1 = 6\theta \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R})$

يعني : $(D) : \begin{cases} x = 6\theta + 1 \\ y = -3\theta + 1 \\ z = 6\theta + 1 \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R})$

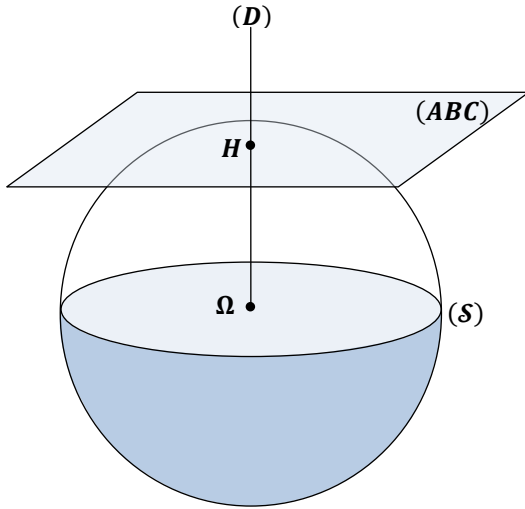
يعني : $(D) : \begin{cases} x = 2(3\theta) + 1 \\ y = -(3\theta) + 1 \\ z = 2(3\theta) + 1 \end{cases} ; (\theta \in \mathbb{R})$

نضع : $3\theta = t$ نحصل على : $(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

و هذه الكتابة الأخيرة عبارة عن تمثيل بارامترى للمستقيم (D) .

2 ب

في هذا السؤال سوف نستعمل التمثيل البارامترى للمستقيم (D) و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) . و نستعين بالشكل التالي :



بما أن المستوى (ABC) مماس لـ $(\mathcal{S})$ في H . فإن : $(\Omega H) \perp (ABC)$
و نعلم أن : $(D) \perp (ABC)$ (1)
إذن من (1) و (2) نستنتج أن : $(\Omega H) \parallel (D)$

و بما أن : Ω نقطة مشتركة بين المستقيمين (ΩH) و (D) .
فإن المستقيمان (D) و (ΩH) منطبقان . يعني : $H \in (D)$ (3)

حصلنا إذن على ما يلي : $\begin{cases} H \in (D) \\ H \in (ABC) \end{cases}$

و لدينا : $(D) : \begin{cases} x = 2t + 1 \\ y = -t + 1 \\ z = 2t + 1 \end{cases} ; (t \in \mathbb{R})$

و لدينا كذلك : $\begin{cases} H(\alpha, \beta, \gamma) \\ (ABC) : 2x - y + 2z + 6 = 0 \end{cases}$

بما أن $H(\alpha, \beta, \gamma)$ نقطة مشتركة بين المستقيم (D) و المستوى (ABC) .
فإن المثلث (α, β, γ) يحقق كلاً من التمثيل البارامترى للمستقيم (D) و المعادلة الديكارتية للمستوى (ABC) .

إذن : $(\exists t \in \mathbb{R}) : \begin{cases} \alpha = 2t + 1 \\ \beta = -t + 1 \\ \gamma = 2t + 1 \\ 2\alpha - \beta + 2\gamma + 6 = 0 \end{cases}$

نعوض قيم α و β و γ في المعادلة الأخيرة نحصل على :

$2(2t + 1) - (-t + 1) + 2(2t + 1) + 6 = 0$

يعني : $4t + t + 4t + 9 = 0$ إذن : $t = -1$



2 ج

يكفي أن نبرهن على أن : $aff(C) = -i aff(A) + 5i + 9$
 لدينا حسب المعطيات : $aff(A) = a = (2 - i)$
 إذن : $-i aff(A) + 5i + 9 = -i(2 - i) + 5i + 9$
 $= -2i - 1 + 5i + 9 = 3i + 8 = aff(C)$
 حصلنا إذن على : $-i aff(A) + 5i + 9 = aff(C)$
 إذن حسب الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$ نستنتج أن : $\mathcal{R}(A) = C$

التمرين الثالث :

1

نعتبر العبارة (P_n) التالية : $(P_n) : (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$
 من أجل $n = 0$ لدينا : $u_0 = 3 > 1$. إذن العبارة (P_0) صحيحة .
 ليكن $n \in \mathbb{N}$ نفترض أن : $u_n > 1$.
 نحتاج إلى أن نبرهن على أن : $u_{n+1} > 1$
 و عادة ما ننطلق من $u_{n+1} > 1$ لكي نحدد العبارة التي سننطلق منها
 باستعمال المسار العكسي و هو ما سوف أعرضه الآن :

نحتاج إلى : $u_{n+1} > 1$
 يعني نحتاج إلى : $\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} > 1$
 يعني نحتاج إلى : $4u_n + 3 > 3u_n + 4$
 يعني نحتاج إلى : $u_n > 1$
 و هذه المتفاوتة متوفرة لدينا حسب الافتراض

إذن تمكنا من إيجاد المسار العكسي للبرهان .
 و البرهان الذي يجب كتابته على ورقة التحرير هو التالي :

لدينا حسب الافتراض : $u_n > 1$
 إذن : $4u_n - 3u_n > 4 - 3$ يعني : $4u_n + 3 > 3u_n + 4$
 يعني : $\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} > 1$ يعني : $u_{n+1} > 1$

أي أن العبارة (P_{n+1}) صحيحة .
 خلاصة : حصلنا على النتائج التالية : $\{ (P_0) \text{ est vraie} ; (P_n) \Rightarrow (P_{n+1}) ; (\forall n \in \mathbb{N}) \}$

إذن حسب مبدأ التراجع : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$

2 أ

ليكن : $(n \in \mathbb{N})$. لدينا : $1 - v_n = 1 - \frac{u_n - 1}{u_n + 1}$
 $= \frac{u_n + 1}{u_n + 1} - \frac{u_n - 1}{u_n + 1} = \frac{2}{u_n + 1}$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1}$

و نعلم حسب السؤال 1) أن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n > 1$

إذن : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n + 1 > 2 > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{1}{u_n + 1} > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \frac{2}{u_n + 1} > 0$

يعني : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 - v_n > 0$



نعوض t بقيمة -1 في المعادلات الثلاث الأولى نحصل على :

$$\begin{cases} \alpha = 2(-1) + 1 = -1 \\ \beta = -(-1) + 1 = 2 \\ \gamma = 2(-1) + 1 = -1 \end{cases}$$



و بالتالي : $H(-1, 2, -1)$ هي نقطة تماس المستوى (ABC) و الفلكة (S)

التمرين الثاني :

1 أ

لدينا : $\frac{c - a}{b - a} = \frac{(8 + 3i) - (2 - i)}{(6 - 7i) - (2 - i)} = \frac{6 + 4i}{4 - 6i} = \frac{3 + 2i}{2 - 3i}$
 $= \frac{(3 + 2i)(2 + 3i)}{(2 - 3i)(2 + 3i)} = \frac{6 + 13i - 6}{2^2 - (3i)^2} = \frac{13i}{4 + 9} = \frac{13i}{13} = i$

و بالتالي : $(*) \quad \frac{c - a}{b - a} = i$

1 ب

لدينا : $\frac{c - a}{b - a} = i$ إذن : $\begin{cases} \left| \frac{c - a}{b - a} \right| = |i| \\ \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \equiv \arg(i) [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} \left| \frac{c - a}{b - a} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$ يعني : $\begin{cases} |c - a| = |b - a| \\ \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

يعني : $\begin{cases} AC = AB \\ \arg\left(\frac{c - a}{b - a}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$

و بالتالي ABC مثلث متساوي الساقين و قائم الزاوية في نفس النقطة A .

2 أ

لدينا Ω منتصف القطعة $[BC]$. إذن : $aff(\Omega) = \frac{aff(B) + aff(C)}{2}$
 $aff(\Omega) = \frac{(6 - 7i) + (8 + 3i)}{2} = (7 - 2i) = \omega$ يعني :

2 ب

لدينا $\mathcal{R}$ دوران مُعرّف بما يلي : $\mathcal{R}_\Omega\left(\frac{-\pi}{2}\right) : \begin{cases} (P) \mapsto (P) \\ M(z) \mapsto M'(z') \end{cases}$

و ننطلق من الكتابة التالية : $\mathcal{R}(M) = M'$

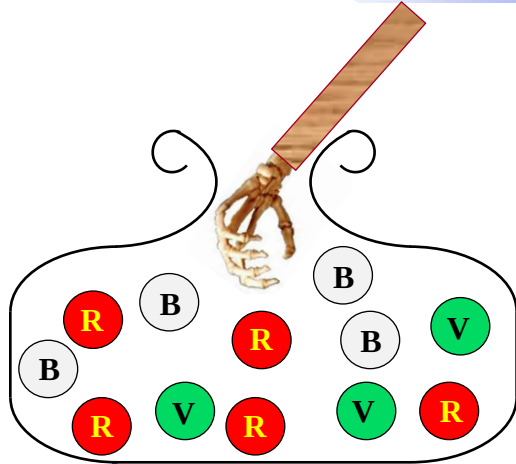
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow (z' - \omega) &= e^{\frac{-i\pi}{2}}(z - \omega) \\ \Leftrightarrow z' - (7 - 2i) &= \left(\cos\left(\frac{-\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{-\pi}{2}\right)\right)(z - 7 + 2i) \\ \Leftrightarrow z' - (7 - 2i) &= (-i)(z - 7 + 2i) \\ \Leftrightarrow z' &= -iz + 7i + 2 + 7 - 2i \\ \Leftrightarrow z' &= -iz + 5i + 9 \end{aligned}$$

و هذه الكتابة الأخيرة تُعبر عن الكتابة العقدية للدوران $\mathcal{R}$.

و بذلك يصبح الدوران $\mathcal{R}$ مُعرّف بما يلي :

$$\mathcal{R}_\Omega\left(\frac{-\pi}{2}\right) : \begin{cases} (P) \mapsto (P) \\ M(z) \mapsto M'(-iz + 5i + 9) \end{cases}$$

التمرين الرابع :



عندما نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كرات من كيس يحتوي على 12 كرة فإن التجربة تُحتمل C_{12}^3 نتيجة ممكنة .
يعني : $card(\Omega) = C_{12}^3 = 220$. بحيث Ω هو كون إمكانيات هذه التجربة العشوائية .

1

$$p \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right) = \frac{card \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right)}{card(\Omega)} = \frac{C_5^3}{220} = \frac{10}{220} = \frac{1}{22}$$

2

$$p \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات من} \\ \text{نفس اللون} \end{array} \right) = p \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right)$$

$$= \frac{card \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right)}{card(\Omega)} + \frac{card \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right)}{card(\Omega)} + \frac{card \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right)}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{C_5^3}{220} + \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} = \frac{10}{220} + \frac{4}{220} + \frac{1}{220} = \frac{15}{220} = \frac{3}{44}$$

3

للإجابة على هذا السؤال أقترح طريقتين :
الطريقة الأولى :

$$p \left(\begin{array}{c} \text{الحصول على} \\ \text{ثلاث كرات} \\ \text{حمراء} \end{array} \right) = p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين حمراوين} \\ \text{أو كرتان تخالفان} \\ \text{مخالفة للأحمر} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين حمراوين} \\ \text{أو كرتان تخالفان} \\ \text{مخالفة للأحمر} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين حمراوين} \\ \text{أو كرتان تخالفان} \\ \text{مخالفة للأحمر} \end{array} \right)$$

$$= p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين حمراوين} \\ \text{أو كرتان تخالفان} \\ \text{مخالفة للأحمر} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين حمراوين} \\ \text{أو كرتان تخالفان} \\ \text{مخالفة للأحمر} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين حمراوين} \\ \text{أو كرتان تخالفان} \\ \text{مخالفة للأحمر} \end{array} \right)$$

$$= \frac{C_5^1 \times C_7^2}{card(\Omega)} + \frac{C_5^2 \times C_7^1}{card(\Omega)} + \frac{C_5^3 \times C_7^0}{card(\Omega)}$$

$$= \frac{5 \times 21}{220} + \frac{10 \times 7}{220} + \frac{10}{220} = \frac{185}{220} = \frac{37}{44}$$

2

$$v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 1} \quad \text{ليكن } n \in \mathbb{N} \text{ . لدينا حسب السؤال أ) :}$$

$$\text{إذن : } v_n(u_n + 1) = u_n - 1$$

$$\text{يعني : } v_n u_n + v_n = u_n - 1$$

$$\text{أي : } v_n u_n - u_n = -1 - v_n$$

$$\text{يعني : } u_n(v_n - 1) = -1 - v_n$$

$$\text{أي : } u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \quad \text{أي : } u_n = \frac{-1 - v_n}{v_n - 1}$$

$$\text{و بالتالي : } u_n = \frac{1 + v_n}{1 - v_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

3

$$\text{لدينا حسب السؤال 2 أ) : } 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{يعني : } v_n = 1 - \frac{2}{u_n + 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{أي : } v_{n+1} = 1 - \frac{2}{u_{n+1} + 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$= 1 - \frac{2}{\left(\frac{4u_n + 3}{3u_n + 4} + 1 \right)} = 1 - \frac{2}{\left(\frac{7u_n + 7}{3u_n + 4} \right)}$$

$$= 1 - \frac{2(3u_n + 4)}{7u_n + 7} = \frac{7u_n + 7 - 6u_n - 8}{7u_n + 7}$$

$$= \frac{(u_n - 1)}{7(u_n + 1)} = \frac{1}{7} v_n$$

$$\text{و بالتالي : } v_{n+1} = \frac{1}{7} v_n \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

يعني : $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$.

إذن الحد العام v_n يكتب على الشكل التالي :

$$\text{لدينا : } v_n = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} \right)^n \quad \text{إذن } v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0 + 1} = \frac{3 - 1}{3 + 1} = \frac{1}{2}$$

3

نلاحظ أن $\left(\frac{1}{7} \right)^n$ متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{7}$ و هو عدد حقيقي موجب و أصغر من 1

$$\text{إذن : } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{7} \right)^n = 0 \quad \text{و منه : } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{7} \right)^n = 0$$

$$\text{يعني : } \lim_{n \rightarrow \infty} (v_n) = 0$$

$$\text{و لدينا حسب السؤال 2 أ) : } 1 - v_n = \frac{2}{u_n + 1} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{يعني : } u_n + 1 = \frac{2}{1 - v_n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{يعني : } u_n = \frac{2}{1 - v_n} - 1 \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

$$\text{و بالتالي : } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{1 - v_n} - 1 \right) = \frac{2}{1 - 0} - 1 = 1$$

$$\text{يعني : } \lim_{n \rightarrow \infty} (u_n) = 1$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

من أجل $x = 0$ نحصل على :

$$f'(0) = 1 + \frac{2e^0}{(e^0 + 1)^2} = 1 + \frac{2}{2^2} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$



لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$

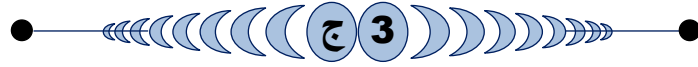
نعلم أن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; e^x > 0$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 2e^x > 0$ و $(e^2 + 1)^2 > 0$

ومنه : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$

يعني : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) > 0$

إذن f دالة تزايدية قطعاً على $\mathbb{R}$.



نعلم أن معادلة المماس (T) للمنحنى $(\mathcal{C})$ في النقطة x_0 تُكتب على الشكل :

$$(T) : y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

إذن من أجل $x_0 = 0$ نجد : $(T) : y = f'(0)(x - 0) + f(0)$

يعني : $(T) : y = f'(0) \cdot x + f(0)$

ولدينا : $f'(0) = \frac{3}{2}$ و $f(0) = 0$

إذن المعادلة الديكارتية للمماس (T) تُصبح : $(T) : y = \frac{3}{2}x$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} \right)$$

$$= \left(+\infty + 1 - \frac{2}{+\infty} \right) = (+\infty + 1 - 0) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} - (x + 1) \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-2}{e^x + 1} \right) = \frac{-2}{+\infty} = 0$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (x + 1) = 0$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = 1$

ولدينا من جهة أخرى : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x(e^x + 1)} \right)$

$$= 1 + \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty} = 1 + 0 - 0 = 1$$

إذن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$



الطريقة الثانية : استعمال تقوية الحدث المضاد .

إذا كان $\bar{A}$ هو الحدث المضاد للحدث A فإن : $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

نضع : $A = \{ \text{الحصول على كرة واحدة على الأقل} \}$

إذن : $\bar{A} = \{ \text{الحصول على ثلاث كرات من ألوان تخالف الأحمر} \}$

$$p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث كرات} \\ \text{تخالف اللون} \\ \text{الأحمر} \end{array} \right) = p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{بيضاويتين} \\ \text{أو الأخرى} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{خضراويتين} \\ \text{أو الأخرى} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right)$$

$$= p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{ثلاث} \\ \text{كرات} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{بيضاويتين} \\ \text{و الأخرى} \\ \text{خضراء} \end{array} \right) + p \left(\begin{array}{c} \text{كرتين} \\ \text{خضراويتين} \\ \text{و الأخرى} \\ \text{بيضاء} \end{array} \right)$$

$$= \frac{C_4^3}{220} + \frac{C_3^3}{220} + \frac{C_4^2 \times C_3^1}{220} + \frac{C_3^2 \times C_4^1}{220}$$

$$= \frac{4}{220} + \frac{1}{220} + \frac{18}{220} + \frac{12}{220} = \frac{35}{220} = \frac{7}{44}$$

إذن : $p(A) = 1 - p(\bar{A})$

يعني : $p(A) = 1 - \frac{7}{44} = \frac{44 - 7}{44} = \frac{37}{44}$

وبالتالي : احتمال الحصول على كرة حمراء واحدة على الأقل هو : $\frac{37}{44}$

التمرين الخامس :



ليكن x عنصراً من $\mathbb{R}$. لدينا : $f(x) = x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$

إذن : $f(-x) = -x + \frac{e^{-x} - 1}{e^{-x} + 1} = -x + \frac{e^{-x}(1 - e^x)}{e^{-x}(1 + e^x)}$

$$= -x + \frac{1 - e^x}{1 + e^x} = - \left(x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} \right) = -f(x)$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(-x) = -f(x)$

و هذا يعني أن الدالة f دالة فردية وتمثيلها المباني متماثل بالنسبة للنقطة O أصل المعلم .



لدينا : $x + 1 - \frac{2}{e^x + 1} = x + \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{2}{e^x + 1}$

$$= x + \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = f(x)$$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$



لدينا : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f(x) = x + 1 - \frac{2}{e^x + 1}$

إذن : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; f'(x) = 1 - \left(\frac{2}{e^x + 1} \right)'$

$$= 1 - \left(\frac{-2e^x}{(e^x + 1)^2} \right) = 1 + \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

● (6 أ) ●

$$H'(x) = (x - \ln(e^x + 1))' \quad \text{ليكن } x \text{ عددا حقيقيا. لدينا:}$$

$$= 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{e^x + 1}{e^x + 1} - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1} = h(x)$$

إن H دالة أصلية للدالة h على $\mathbb{R}$.

● (6 ب) ●

$$\int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) dx = \int_0^{\ln 2} h(x) dx = [H(x)]_0^{\ln 2}$$

$$= [x - \ln(e^x + 1)]_0^{\ln 2} = (\ln 2 - \ln 3) - (0 - \ln 2)$$

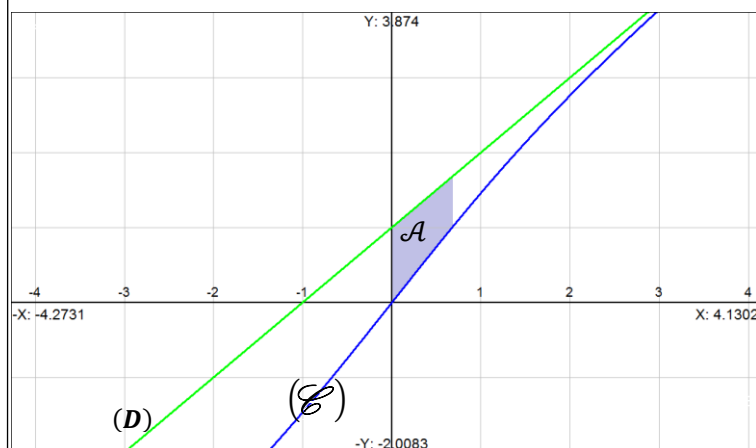
$$= 2 \ln 2 - \ln 3 = \ln 4 - \ln 3 = \ln \left(\frac{4}{3} \right)$$

● (6 ج) ●

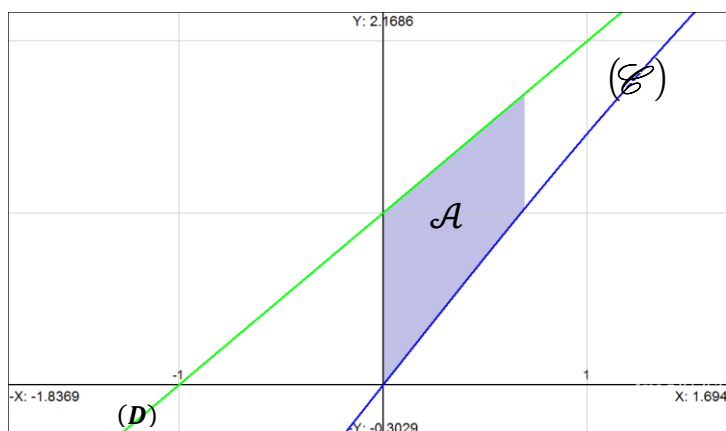
لتكن $\mathcal{A}$ مساحة حيز المستوى المحصور بين المنحنى $(\mathcal{E})$ و المستقيم (D) و المستقيمين $x = \ln 2$ و $x = 0$. لدينا:

$$\mathcal{A} = \int_0^{\ln 2} |f(x) - (x + 1)| dx = \int_0^{\ln 2} \left| \frac{-2}{e^x + 1} \right| dx$$

$$= 2 \int_0^{\ln 2} \left(\frac{1}{e^x + 1} \right) dx = 2 \left(\ln \left(\frac{4}{3} \right) \right) \approx 0,57 \text{ unité}^2$$



صورة أخرى للمساحة $\mathcal{A}$



● (4 ج) ●

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 1x = 1 \end{cases}$$

لقد حصلنا لحد الآن على النهايات التالية:

إن من هذه النهايات الثلاث نستنتج أن المستقيم $(D): y = x + 1$ مقارب مائل للمنحنى $(\mathcal{E})$ بجوار $+\infty$.

لدراسة الوضع النسبي للمنحنى $(\mathcal{E})$ و المستقيم (D) ندرس إشارة الفرق $f(x) - (x + 1)$.

لدينا:

$$f(x) - (x + 1) = (x + 1) - \frac{2}{e^x + 1} - (x + 1) = \frac{-2}{e^x + 1}$$



ونعلم أن: $(\forall x \in \mathbb{R}); e^x > 0$

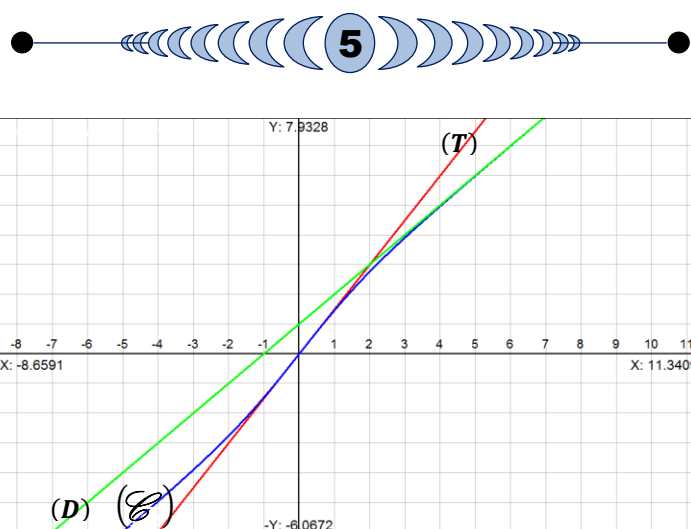
إن: $(\forall x \in \mathbb{R}); e^x + 1 > 0$

يعني: $(\forall x \in \mathbb{R}); \frac{-2}{e^x + 1} < 0$

يعني: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) - (x + 1) < 0$

يعني: $(\forall x \in \mathbb{R}); f(x) < (x + 1)$

و بالتالي: المستقيم (D) يوجد فوق المنحنى $(\mathcal{E})$



المنحنى $(\mathcal{E})$ لوحده

