

تصحيح الامتحان الوطني الموحد للبيكالوريا الدورة الاستدراكية 2008

المادة :	الرياضيات
الشعب :	شعبة العلوم التجريبية بمسالكها وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكها
المعامل :	7
مدة الإنجاز :	3 س

تمرين 1:

1. حل المعادلة $z^2 - 8z + 17 = 0$ في $\mathbb{C}$:
مميز المعادلة Δ هو :

$$\Delta = -8^2 - 4 \times 17$$

$$= 64 - 68$$

$$= -4 = (2i)^2$$

إذن حلا المعادلة $z^2 - 8z + 17 = 0$ هما :

$$z_1 = \frac{-(-8) + 2i}{2} = 4 + i \text{ و } z_2 = \overline{z_1} = 4 - i$$

2. نبين أن $z' = -iz - 1 + 3i$:

نضع الكتابة العقدية للدوران الذي مركزه w وزاويته $\frac{3\pi}{2}$:

$$z' - w = e^{i \frac{3\pi}{2}} (z - w)$$

$$e^{i \frac{3\pi}{2}} = \cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -i$$

نعلم أن :

إذن المتساوية السابقة تصبح :

$$z' - (1 + 2i) = -i(z - (1 + 2i))$$

$$z' = -iz + i(1 + 2i) + (1 + 2i) \text{ أي :}$$

$$= -iz + i - 2 + 1 + 2i$$

$$= -iz - 1 + 3i \text{ ومنه}$$

$$z' = -iz - 1 + 3i \text{ أي أن :}$$

ب- التحقق من أن $c = -i$

لدينا صورة النقطة A بالدوران R هي النقطة C

$$z'_A = z_C \text{ إذن :}$$

ومنه فإن : $z_C = -iz_A - 1 + 3i$

يعني أن : $= -ia - 1 + 3i$

يعني أن : $= -i(4+i) - 1 + 3i$

يعني أن : $= -4i + 1 - 1 + 3i = -i$

أي أن : $z_C = -i$

ج- نبين أن $b - c = 2(a - c)$ ، واستنتج أن النقط A و B و C مستقيمية :

وبما أن : $(1) \quad b - c = 8 + 3i + i = 8 + 4i$

و : $(2) \quad 2(a - c) = 2(4 + i + i) = 8 + 4i$

من (1) و (2) نجد $b - c = 2(a - c)$

أي أن : $\overrightarrow{CB} = 2\overrightarrow{CA}$ وبالتالي فإن النقط A و B و C مستقيمية.

التمرين 2:

1. مركز (S) وشعاعها :

تكافئ معادلة الفلكة (S) :

$$x^2 - 4x + y^2 - 6y + z^2 + 2z + 5 = 0$$

يعني أن : $x - 2^2 - 4 + y - 3^2 - 9 + z + 1^2 - 1 + 5 = 0$

يعني أن : $x - 2^2 + y - 3^2 + z + 1^2 = 9$

وبالتالي فإن مركز (S) هو النقطة $I(2, 3, -1)$ وشعاعها هو : $R = \sqrt{9} = 3$

2. أ- نبين أن مسافة I عن (P) تساوي $\sqrt{6}$:

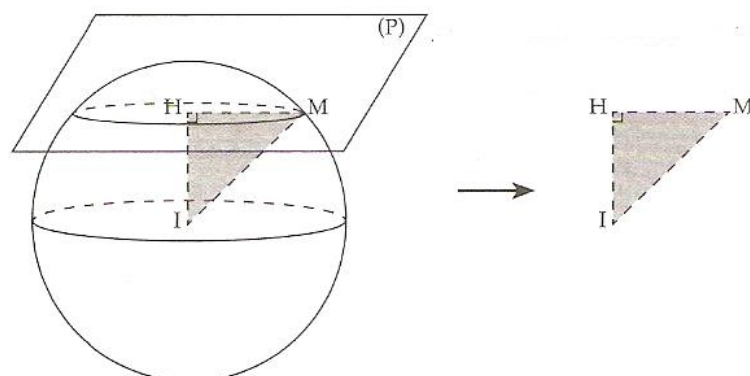
$$\begin{aligned} d(I, (p)) &= \frac{|x_1 + 2y_1 + z_1 - 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 - 1^2}} \\ &= \frac{|2 + 2 \times 3 - 1 - 1|}{\sqrt{6}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} \end{aligned}$$

ومنه فإن : مسافة I عن (P) تساوي $\sqrt{6}$

ب- الإستنتاج :

بما أن : $\sqrt{6} < 3$ أي أن $d(I, (p)) < R$ فإن المستوى (P) يقطع الفلكة (S) وفق دائرة Γ وشعاعها r بحيث :

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{R^2 - d^2} \\ &= \sqrt{9 - \sqrt{6}^2} = \sqrt{3} \end{aligned}$$



$r = \sqrt{R^2 - d^2}$: إذن $d^2 + r^2 = R^2$: بحسب مبرهنة فيثاغورس المباشرة لدينا :

3. أ- التمثيل البارامترى ل (D) :

بما أن المتجهة $\vec{n} = (1, 2, 1)$ منتظمة على المستوى (P) فإنها (أي $\vec{n}$) متجهة موجهة للمستقيم (D) وبالتالي فإن تمثيل بارامترى ل (D) يكتب كالتالي :

$$(t \in \mathbb{R}) \quad \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \\ z = -1 + t \end{cases} \quad \text{أي} \quad \begin{cases} x = x_1 + t \\ y = y_1 + 2t \\ z = z_1 + t \end{cases} \quad (t \in \mathbb{R})$$

ب- نبين أن مركز الدائرة Γ هي النقطة $H(1, 1, -2)$:

تقاطع المستقيم (D) والمستوى (P) هي مركز الدائرة Γ .

لتحديد إحداثياتها نعوض x و y و z في معادلة (p) فنجد : $(2+t) + 2(3+2t) + (-1+t) - 1 = 0$

يعني أن : $t + 4t + t + 2 + 6 - 1 - 1 = 0$

وبالتالي فإن : $6t = -6$

ومنه فإن : $t = -1$

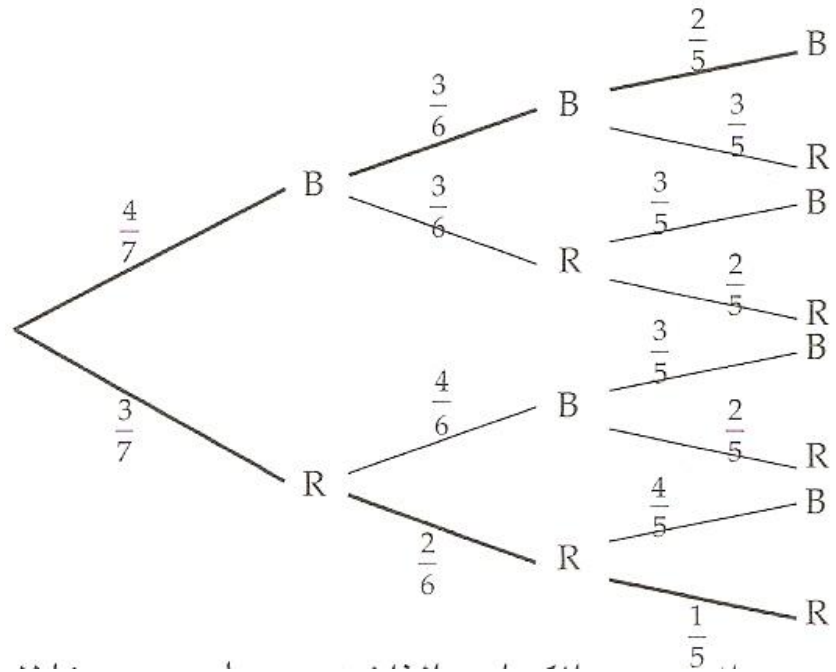
إذن إحداثيات H هي :

$$\begin{cases} x = 2 - 1 \\ y = 3 - 2 \\ z = -1 - 1 \end{cases}$$

ومنه فإن : $H(1, 1, -2)$

تمرين 3:

يمكن استعمال شجرة الاختيارات كالتالي :



1. احتمال الحصول على 3 كرات بيضاء :
يتحقق الحدث " الكرات الثلاث بيضاء " من خلال B-B-B- واحتماله هو جداء احتمالات فروع

$$P(BBB) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{5}$$

$$P(BBB) = \frac{24}{210}$$

$$P(BBB) = \frac{8}{70}$$

1. نبين أن احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون هو $\frac{1}{7}$:

الكرات الثلاث من نفس اللون يعني انها كلها بيضاء أو حمراء .
وبالتالي فإن احتمال هذا الحدث هو :

$$P(BBB) + P(RRR) = \frac{4 \times 3 \times 2}{7 \times 6 \times 5} + \frac{3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5} = \frac{24 + 6}{7 \times 6 \times 5} = \frac{30}{7 \times 30} = \frac{1}{7}$$

أي أن احتمال الحصول على 3 كرات من نفس اللون هو $\frac{1}{7}$

3. احتمال الحصول على كرة بيضاء واحدة على الأقل :
طريقة أولى :

الحدث المضاد للحدث كرة واحدة على الأقل بيضاء هو جميع الكرات حمراء. احتمال هذا الحدث هو :

$$1 - P(RRR) = 1 - \frac{1}{35} = \frac{34}{35}$$

طريقة ثانية : كون الإمكانات Ω حيث : $Card \Omega = 7 \times 6 \times 5$

عدد الإمكانات لتكون الكرة المسحوبة أولا بيضاء هو 4.

عدد الإمكانات لتكون الكرة المسحوبة ثانيا بيضاء هو 3.

عدد الإمكانيات لتكون الكرة المسحوبة في المرة الثالثة بيضاء هو 2.

$$P(BBB) = \frac{4 \times 3 \times 2}{7 \times 6 \times 5}$$

وبالتالي فإن احتمال الحدث BBB هو :
وبنفس الطريقة ننجز بقية الأسئلة .

تمرين 4 :

1. نبين أن $u_{n+1} > 1$ لكل $n \in \mathbb{N}$:

نستعمل البرهان بالترجع .

$$u_0 = 2$$

$$u_0 > 1$$

نفترض أن $u_n > 1$ ولنبين أن $u_{n+1} > 1$

$$u_{n+1} - 1 = \frac{5u_n}{2u_n + 3} - 1 = \frac{5u_n - 2u_n - 3}{2u_n + 3} = \frac{3u_n - 1}{2u_n + 3}$$

حسب افتراض التراجع لدينا $u_n > 1$

$$3(u_n - 1) > 0$$

$$2u_n + 3 > 0$$

$$\frac{3u_n - 1}{2u_n + 3} > 0$$

$$u_{n+1} > 1$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_n > 1$$

2. أ- نبين أن v_n متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ ، وكتابة v_n بدلالة n .

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{1}{u_{n+1}} = 1 - \frac{2u_n + 3}{5u_n}$$

$$= \frac{5u_n - 2u_n - 3}{5u_n}$$

$$= \frac{3u_n - 3}{5u_n} = \frac{3}{5} \left(\frac{u_n - 1}{u_n} \right) = \frac{3}{5} v_n$$

وبالتالي فإن $v_{n+1} = \frac{3}{5} v_n \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ومنه v_n متتالية هندسية أساسها $\frac{3}{5}$ ومنه :

$$v_n = v_0 \times \left(\frac{3}{5} \right)^n$$

$$v_0 = \frac{u_0 - 1}{u_0} = \frac{1}{2}$$

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad v_n = \frac{1}{2} \times \left(\frac{3}{5} \right)^n$$

ب- نبين أن $u_n = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$:

$$v_n = 1 - \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow v_n = \frac{u_n - 1}{u_n}$$

يعني أن : $\frac{1}{u_n} = 1 - v_n$

أي أن : $u_n = \frac{1}{1 - v_n}$

ومنه فإن : $u_n = \frac{1}{1 - \frac{1}{2} \left(\frac{3}{5}\right)^n} = \frac{2}{2 - \left(\frac{3}{5}\right)^n}$

نعلم أن $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^n = 0$ لأن $-1 < \frac{3}{5} < 1$

إذن : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{2}{2} = 1$

مسألة

1.1 نحسب $g'(x)$ ، ثم نبين أن g تزايدية على $0, +\infty$ و تناقصية على $-\infty, 0$:

لدينا : $g'(x) = e^{2x} - 2x - 2 = 2e^{2x} - 2$

$= 2e^{2x} - 1$

وبما أن الدالة الأسية تزايدية على $\mathbb{R}$:

فإن : $x \geq 0 \Rightarrow 2x \geq 0 \Rightarrow e^{2x} \geq e^0$

$\Rightarrow e^{2x} \geq 1$

$\Rightarrow g'(x) \geq 0$

وبالتالي فإن g تزايدية على $0, +\infty$

وبنفس الطريقة : $x \leq 0 \Rightarrow e^{2x} \leq e^0$

$\Rightarrow g'(x) \leq 0$

وبالتالي فإن g تناقصية على $-\infty, 0$

2. استنتاج :

نستنتج من س 1. جدول تغيرات g على $\mathbb{R}$

كما أن $g(0)$ قيمة دنوية ل g على $\mathbb{R}$.

إذن :

x	$+\infty$	0	$-\infty$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$			

وبالتالي فإن : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) \geq 1$

ومنه : $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) > 0$

II - 1. أ- نبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$:

لدينا : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$

ومنه : $\lim_{x \rightarrow -\infty} (e^{2x} - 2x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} - \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = 0 + \infty = +\infty$

وبالتالي : $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(e^{2x} - 2x) = +\infty$

(لأن $\lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$ بوضع $X = e^{2x} - 2x$ لكل x من $\mathbb{R}^*$:

ب- التحقق من أن $\frac{f(x)}{x} = \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2 \right) \frac{\ln e^{2x} - 2x}{e^{2x} - 2x}$ لكل x من $\mathbb{R}^*$

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{\ln e^{2x} - 2x}{x} = \frac{e^{2x} - 2x}{x} \times \frac{\ln e^{2x} - 2x}{e^{2x} - 2x} \\ &= \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2 \right) \frac{\ln e^{2x} - 2x}{e^{2x} - 2x} \\ &= \left(\frac{e^{2x}}{x} - 2 \right) \frac{\ln e^{2x} - 2x}{e^{2x} - 2x} \end{aligned}$$

ج- نبين أن $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln e^{2x} - 2x}{e^{2x} - 2x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$$

(نضع : $t = e^{2x} - 2x$)

$t \rightarrow +\infty$ عندما x يؤول إلى $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} \times \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \times 0 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \times 0 = 0$$

د- نبين أن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعاً شلجيميا :

النتيجة $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ تعني أن المنحنى (C) يقبل بجوار $-\infty$ فرعاً شلجيميا اتجاهه محور الأفاسيل.

2. أ-

حسب I 2. لدينا : $\forall x \in 0, +\infty \quad g(x) > 0$

ومنه فإن : $e^{2x} - 2x > 0$

$$\frac{e^{2x} - 2x}{e^{2x}} > 0 \quad \text{أي أن :}$$

$$\text{لأن } e^{2x} > 0 \text{ ومنه : } 1 - \frac{2x}{e^{2x}} > 0$$

$$f(x) = \ln \left[e^{2x} \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} \right) \right] \quad \text{ولدينا :}$$

باستعمال النتائج التالية:

$$\ln a \times b = \ln a + \ln(b)$$

لكل a و b من $0, +\infty$

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \ln e^t = t \quad \text{و}$$

نجد :

$$= \ln e^{2x} + \ln \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} \right) f(x)$$

$$= 2x + \ln \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} \right) f(x)$$

ب- استنتاج :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{2x}}{2x} = +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{e^{2x}} = 0 \quad \text{بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} \right) = 0 \quad \text{فإن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x = +\infty \quad \text{وبالتالي فإن :}$$

ج- نبين أن المستقيم الذي معادلته $y = 2x$ مقارب مائل للمنحنى (C) بجوار $+\infty$:

$$\forall x \in 0, +\infty \quad f(x) - 2x = \ln \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} \right) \quad \text{بما أن :}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = 0 \quad \text{فإن :}$$

وبالتالي فإن المنحنى (C) يقبل بجوار $+\infty$ مقاربا مائلا (D) معادلته $y = 2x$

د- نبين أن $f(x) - 2x \leq 0$ لكل x من $0, +\infty$:

$$\forall x \in 0, +\infty \quad \frac{2x}{e^{2x}} \geq 0 \quad \text{بما أن :}$$

$$\forall x \geq 0 \quad 1 - \frac{2x}{e^{2x}} \leq 1 \quad \text{أي أن : } \frac{-2x}{e^{2x}} \leq 0$$

$$\text{وبالتالي فإن : } \ln \left(1 - \frac{2x}{e^{2x}} \right) \leq 0 \quad \left(\text{لأن } 0 < X \leq 1 \Rightarrow \ln X \leq 0 \right)$$

إذن : $f(x) - 2x \leq 0 \quad \forall x \in 0, +\infty$ وهذا يعني أن (C) يوجد تحت المستقيم (D) على المجال $0, +\infty$

2. أ- نبين أن $f'(x) = \frac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)}$ لكل x من $\mathbb{R}$:

لدينا لكل x من $\mathbb{R}$: $f(x) = \ln g(x)$

إذن : $f'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)} = \frac{2(e^{2x} - 1)}{g(x)}$

ب- دراسة إشارة $f''(x)$ و جدول تغيرات f :

درسنا سابقا إشارة $2(e^{2x} - 1)$ في 1. I

ونعلم أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) > 0$

إذن إشارة $f''(x)$ هي نفسها إشارة $g'(x)$

جدول تغيرات f :

x	$+\infty$	0	$-\infty$
$f''(x)$	-	0	+
f(x)	$+\infty$	0	$+\infty$

4. إنشاء (D) و (C) في المعلم $(o, \vec{i}, \vec{j})$:

