

الأستاذ : محمد الحيان

تصحيح الامتحان الوطني الموحد

الثانية بكالوريا علوم تجريبية بمسالكها

الثانوية التأهيلية محمد السادس بوزرات

الدورة العادية للبكالوريا 2008

وشعبة العلوم والتكنولوجيات بمسلكيها

التمرين الأول:

نعتبر في الفضاء المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ النقطتين $A(0, -1, 1)$ و $B(1, -1, 0)$

والفلكة (S) التي معادلتها : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0$

1. لدينا : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4z + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z-2)^2 = \sqrt{3}^2$

إذن (S) فلكة مركزها $\Omega(1, 0, 2)$ وشعاعها $R = \sqrt{3}$. ولدينا : $0^2 + (-1)^2 + 1^2 - 2 \times 0 - 4 \times 1 + 2 = 0$ ، إذن $A \in (S)$

2. لدينا : $\vec{OA} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ و $\vec{OB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ، ومنه فإن : $\vec{OA} \wedge \vec{OB} = \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \vec{k} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$

وبالتالي فإن : $\vec{OA} \wedge \vec{OB}(1, 1, 1)$

3. لدينا : $\vec{OA} \wedge \vec{OB}(1, 1, 1)$ متجهة منظمية على المستوى (OAB) . إذن معادلة المستوى (OAB) تكتب على شكل $x + y + z + d = 0$ ، وبما أن $O \in (OAB)$ ، فإن $x + y + z = 0$ هي معادلة ديكرتية للمستوى (OAB) .

لنحسب مسافة النقطة A عن المستوى (OAB) : $d(\Omega, (OAB)) = \frac{|1+0+2|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}} = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} = R$

وعليه فإن المستوى (OAB) مماس للفلكة (S) في النقطة A على اعتبار أن $A \in (S)$ و $A \in (OAB)$.

التمرين الثاني:

1. نعتبر في المجموعة $\mathbb{C}$ المعادلة : $z^2 - 6z + 34 = 0$. مميز هذه المعادلة هو : $\Delta = (-3)^2 - 1 \times 34 = 9 - 34 = -25 = (5i)^2$

وبالتالي فإن للمعادلة السابقة حلين عقديين مترافقين هما :

$$z_2 = \frac{-b' - i\sqrt{-\Delta'}}{a} = \frac{-(-3) - 5i}{1} = \boxed{3-5i} \quad \text{و} \quad z_1 = \frac{-b' + i\sqrt{-\Delta'}}{a} = \frac{-(-3) + 5i}{1} = \boxed{3+5i}$$

وبالتالي فإن مجموعة حلول المعادلة هي : $S = \{3-5i, 3+5i\}$

2. في المستوى العقدي المنسوب إلى معلم متعامد ممنظم ومباشر $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$ ، نعتبر النقط A و B و C التي ألقاها على التوالي

لحقها $4-2i$ ، $a=3+5i$ و $b=3-5i$ و $c=7+3i$. لتكن النقطة $M'(z')$ صورة النقطة $M(z)$ بالازاحة T ذات المتجهة $\vec{u}$ التي

$$M' = T(M) \Leftrightarrow \vec{MM'} = \vec{u} \Leftrightarrow z' = z + aff(\vec{u}) \Leftrightarrow \boxed{z' = z + 4 - 2i}$$

وبما أن : $a + 4 - 2i = 3 + 5i + 4 - 2i = 7 + 3i = c$ ، فإن : $C = T(A)$ أي C هي صورة A بالازاحة T .

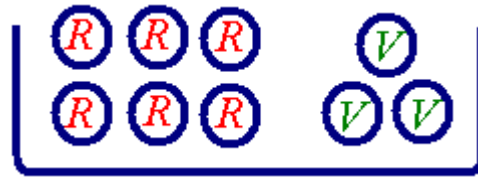
$$\text{ب- لدينا : } \frac{b-c}{a-c} = \frac{3-5i-7-3i}{3+5i-7-3i} = \frac{-4-8i}{-4+2i} = \frac{2i(-4+2i)}{-4+2i} = \boxed{2i}$$

$$\overline{(CA, CB)} \equiv \arg\left(\frac{b-c}{a-c}\right) [2\pi]$$

$$\text{ج- لدينا : } \frac{b-c}{a-c} = 2i = \left[2, \frac{\pi}{2}\right] \text{ ، إذن :}$$

$$\overline{(CA, CB)} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

ومنه فإن ABC مثلث قائم الزاوية في C ولدينا : $\frac{CB}{CA} = \left|\frac{b-c}{a-c}\right| = 2$ ، إذن : $\boxed{BC = 2AC}$



التمرين الثالث :

يحتوي صندوق على ست كرات حمراء وثلاث كرات خضراء (لا يمكن التمييز بينها باللمس)

1. نسحب عشوائيا وفي **أن واحد** (الترتيب غير مهم) ثلاث كرات من الصندوق. تثبتت الصنف : **الثالثان** : C_n^p .

أ- احتمال الحصول على كرتين حمراوين وكرة خضراء RRV هو : $\frac{C_6^2 \times C_3^1}{C_9^3} = \frac{15 \times 3}{84} = \frac{15}{28}$

ب- طريقة 1 : احتمال الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل RRV أو RVV أو VVV هو :

$$\frac{C_6^2 C_3^1 + C_6^1 C_3^2 + C_3^3}{C_9^3} = \frac{15 \times 3 + 6 \times 3 + 1}{84} = \frac{16}{21}$$

طريقة 2 : نضع الحدث A : « الحصول على كرة خضراء واحدة على الأقل ».

الحدث المضاد للحدث A هو : $\bar{A}$: « الحصول على ثلاث كرات حمراء - RRR - ».

$$p(A) = 1 - p(\bar{A}) = 1 - \frac{C_6^3}{C_9^3} = 1 - \frac{20}{84} = \frac{64}{84} = \frac{16}{21}$$

لدينا :

2. نسحب عشوائيا **بالتتابع** **٤ ويون أحـلال** (الترتيب مهم والتكرار غير وارد) ثلاث كرات من الصندوق.

تثبتت الصنف : **الترتيب** **ان بـدون ثـ** : A_n^p .

$$\frac{A_6^3}{A_9^3} = \frac{120}{504} = \frac{5}{21}$$

احتمال الحصول على ثلاث كرات حمراء هو :

...

التمرين الرابع :

الجزء الأول :

تكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $g(x) = x - 2 \ln x$.

1. أ- ليكن $x \in]0, +\infty[$ لدينا : $g'(x) = (x - 2 \ln x)' = 1 - \frac{2}{x} = \frac{x-2}{x}$

ب- نعلم أن : $g'(x) = \frac{x-2}{x}$: $\forall x \in]0, +\infty[$. إذن إشارة $g'(x)$ على المجال $]0, +\infty[$ هي إشارة $x-2$.

ولدينا : $x \in]0, 2] \Rightarrow x \leq 2 \Rightarrow x - 2 \leq 0$ و $x \in [2, +\infty[\Rightarrow x \geq 2 \Rightarrow x - 2 \geq 0$. إذن :

g تناقصية على المجال $]0, 2]$ و تزايدية على المجال $[2, +\infty[$. خلاصة :

x	0	2	$+\infty$
$g'(x)$		-	+
$g(x)$		$g(2) = 2(1 - \ln 2)$	

2. بما أن : $e > 2 \Rightarrow 1 > \ln 2 \Rightarrow 1 - \ln 2 > 0$ ، فإن : $g(2) = 2(1 - \ln 2) > 0$.
ولدينا : $g(2) = 2(1 - \ln 2)$ قيمة دنوية مطلقة للدالة g على المجال $]0, +\infty[$ عند العدد 2 . ومنه فإن :
 $\forall x \in]0, +\infty[: g(x) \geq g(2) > 0$

الجزء الثاني :

نعتبر الدالة العددية f المعرفة على المجال $]0, +\infty[$ بما يلي : $f(x) = x - (\ln x)^2$.

1. لدينا : $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} x - (\ln x)^2 = -\infty$.

المنحنى $(\mathcal{C})$ يقبل مقاربا عموديا معادلته $x = 0$.

2. أ- نضع : $t = \sqrt{x}$. إذن : $x \rightarrow +\infty$. وحيث أن $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0$ ، فإن :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(t^2)}{t} \right)^2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(2 \times \frac{\ln t}{t} \right)^2 = 0$$

ب- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^2}{x} = 0$ ، لأن : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (\ln x)^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) = +\infty$.

ولدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{(\ln x)^2}{x} \right) = 1$.

ج- لدينا : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - (\ln x)^2 - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} -(\ln x)^2 = -\infty$.

$(\mathcal{C})$ يقبل فرعاً شلجيميا بجوار $+\infty$ اتجاهه المستقيم (Δ) الذي معادلته : $y = x$.

د- لدينا : $\forall x \in]0, +\infty[: f(x) - x = -(\ln x)^2 \leq 0$. إذن المنحنى $(\mathcal{C})$ يوجد تحت المستقيم (Δ) .

3. أ- ليكن $x \in]0, +\infty[$ ، لدينا : $f'(x) = (x - (\ln x)^2)' = 1 - 2 \ln'(x) \ln x = 1 - \frac{2 \ln x}{x} = \frac{x - 2 \ln x}{x} = \frac{g(x)}{x}$.

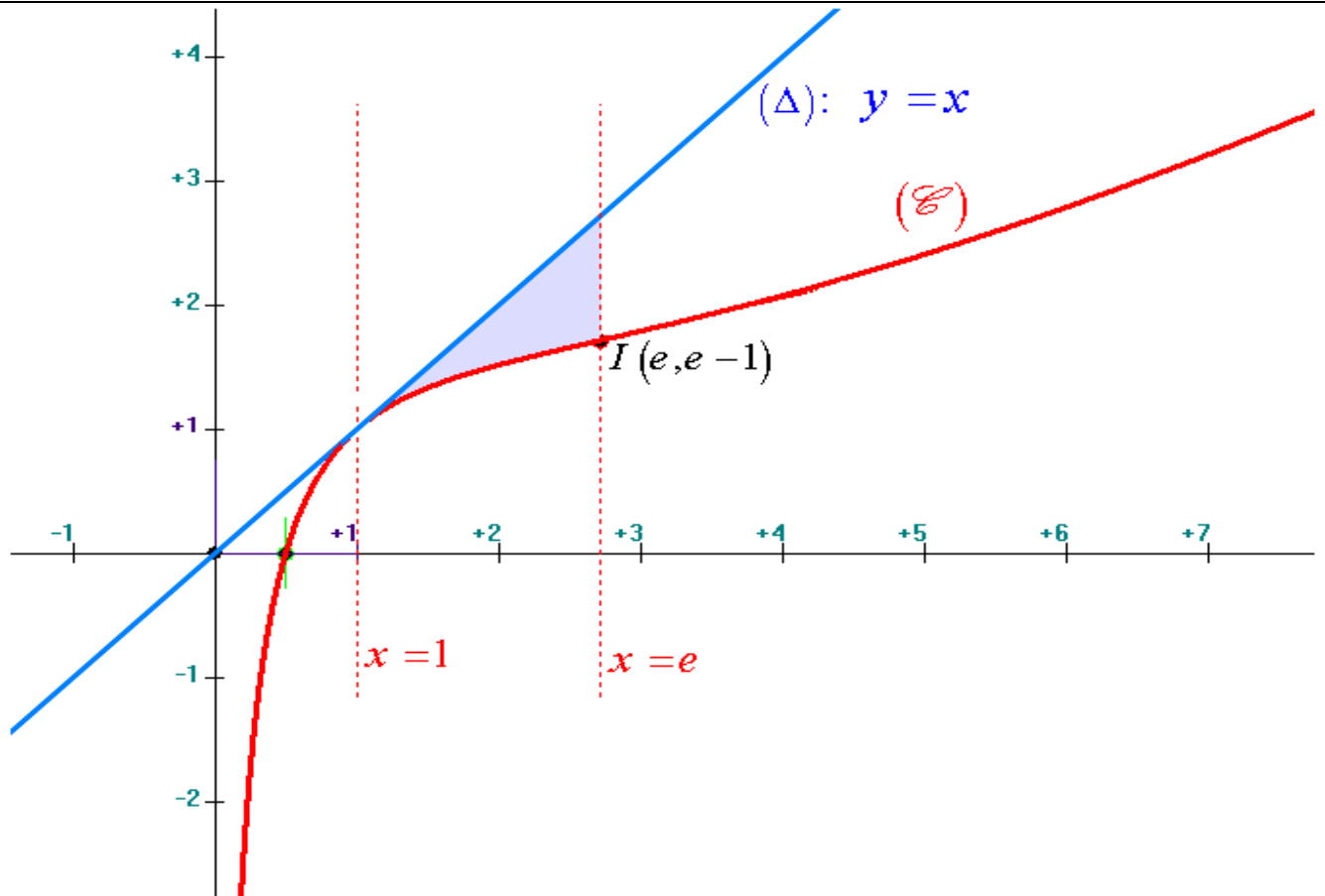
وحسب إشارة $g(x)$ في الجزء الأول ، لدينا : $\forall x \in]0, +\infty[: f'(x) > 0$. إذن f تزايدية على $]0, +\infty[$.

ب- جدول تغيرات الدالة f :

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$

ج- معادلة المماس للمنحنى $(\mathcal{C})$ في النقطة التي أفصولها 1 هي : $y = x$.

4. لدينا : f متصلة وتزايدية قطعاً على المجال $]0, +\infty[$. إذن : f تقبل دالة عكسية f^{-1} معرفة من المجال J حيث :



تمثيل الحدود الستة الأولى للمتتالية العددية $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ على محور الأفاصيل باستعمال Archimède II :

