

تصحيح الفرض رقم 02

التمرين الأول:

② تحديد D_f :

$$D_f = \{x \in \mathbb{R} / x > 0, \sqrt{x} + 1 \neq 0\}$$

$$D_f = \mathbb{R}^+ \cap \mathbb{R}.$$

$$D_f = \mathbb{R}^+$$

$$D_f = [0; +\infty[.$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2.$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

③ قابلية الاشتقاق على حيز 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2}x - 2 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} - 2}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \left(\frac{1}{2}x - 4 + \frac{4}{\sqrt{x}+1} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} - \frac{4}{x} + \frac{4}{x(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} - 4 \frac{\sqrt{x}+1}{x\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) = 0^+ \quad \sqrt{x}(\sqrt{x}+1) > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = -\infty$$

إذن

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{2} - \frac{4}{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)} = -\infty$$

وعليه فإن f غير قابلة للاشتقاق على

نقطة 0. إذن f يقبل نصف مماس

رأسي موجب نحو الأسفل.

⑤ المشتقة $f'(x)$:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)' - 2' + \left(\frac{4}{\sqrt{x}+1}\right)'$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{4'(\sqrt{x}+1) - 4(\sqrt{x}+1)'}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{-\frac{4}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2 - 4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(x + 2\sqrt{x} + 1) - 4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{x\sqrt{x} + 2x + \sqrt{x} - 4}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{\sqrt{x}(x+1) - (x+1) + 3(x-1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1) + 3(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(x+1+3(\sqrt{x}+1))}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

$$= \frac{(\sqrt{x}-1)(x+3\sqrt{x}+4)}{2\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)^2}$$

منه إيجاز التمهيد

صالحه جويج ~

* جدول التغيرات:

إشارة $f'(x)$ هي إشارة $\sqrt{x} - 1$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$\sqrt{x} - 1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$

التحريث الثاني:

① نبين أن $0 < u_n < 1$ ($\forall n \in \mathbb{N}$)

مذاجل $n=0$ $0 < u_0 = \frac{1}{2} < 1$

نفترض أن $0 < u_n < 1$

ونبين أن $0 < u_{n+1} < 1$

$$u_{n+1} = \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2u_{n+1}} \right)$$

و

$$0 < u_n < 1 \Rightarrow 1 < 2u_{n+1} < 3$$

$$\Rightarrow -1 < \frac{1}{2u_{n+1}} < -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 0 < 1 - \frac{1}{2u_{n+1}} < \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow 0 < \frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{2u_{n+1}} \right) < 1$$

$$\Rightarrow 0 < u_{n+1} < 1$$

وعليه $\forall n \in \mathbb{N}$ $0 < u_n < 1$

② رتبة u_n :

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \frac{3u_n}{2u_{n+1}} - u_n \\ &= \frac{2u_n(1 - u_n)}{2u_{n+1}} \end{aligned}$$

$$2u_{n+1} > 0 \quad \text{و} \quad 0 < 1 - u_n < 1$$

$$0 < 2u_n(1 - u_n) < 2$$

$$u_{n+1} > u_n$$

وعليه u_n متتالية تزايدية.

③ نبين أن v_n هندسية:

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= 1 - \frac{1}{u_{n+1}} \Leftrightarrow v_{n+1} = 1 - \frac{1+2u_n}{3u_n} \\ &= \frac{u_n - 1}{3u_n} \\ &= \frac{u_n}{3u_n} - \frac{1}{3u_n} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{3u_n} \\ &= \frac{1}{3} \left(1 - \frac{1}{u_n} \right) \\ &= \frac{1}{3} v_n \end{aligned}$$

وعليه v_n متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{3}$.

$$\begin{aligned} v_0 &= 1 - \frac{1}{u_0} \\ &= -1 \end{aligned}$$

$$v_n = 1 - \frac{1}{u_n} \Leftrightarrow v_n - 1 = -\frac{1}{u_n} \quad \text{④}$$

$$\frac{1}{v_n - 1} = -u_n$$

$$u_n = \frac{1}{1 - v_n}$$

$$v_n = v_0 q^n$$

$$= -1 \times \left(\frac{1}{3} \right)^n$$

$$u_n = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{3} \right)^n}$$

$$u_n = \frac{1}{\frac{3^n + 1}{3^n}}$$

$$u_n = \frac{3^n}{3^n + 1}$$

نهاية u_n :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^n + 1}$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{3^n}{3^n \left[1 + \left(\frac{1}{3} \right)^n \right]}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$$

$$\text{لأن } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{3} \right)^n = 0 \quad \text{و} \quad -1 < \frac{1}{3} < 1$$

بإشراف الأستاذ:

الأنثي بوشعيب