هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

الثانوية الجاحظ التاهيلية	تصحيح : فرض محروس رقم 1 الدورة الاولى في مادة الرياضيات	السنة الدراسية : 2012/2013
المستوى : الثانية باك علوم تجريبية		استاذ : عبدالفتاح قويدر

تصحيح تمرين 1 :

1- لنبين ان: $x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حلا وحيدا في المجال $[-2;0]$

لدينا $x \to x^3 + x + 1$ متصلة على $\mathbb{R}$ وبالتحديد على مجال $[-2;0]$ (لانها دالة حدودية)

وكذلك الدالة $x \to x^3 + x + 1$ **قابلة الاشتقاق على** $\mathbb{R}$ وبالتحديد على مجال $[-2;0]$ (لانها دالة حدودية)

وبالتالي : $f'(x) = (x^3 + x + 1)' = 3x^2 + 1 \geq 0$

(لان $x^2 \geq 0$)

وبالتالي f دالة تزايدية على $[-2;0]$

لنحسب: $f(0) \times f(-2)$

$f(0) = 0^3 + 0 + 1 = 1$

و $f(-2) = (-2)^3 - 2 + 1 = -9$

وبالتالي : $f(0) \times f(-2 = 1 \times -9 = -9 < 0$

ومنه فإن المعادلة $f(x) = x^3 + x + 1 = 0$ تقبل حل وحيد في المجال $[-2;0]$

2- لنحسب النهايات التالية :

1) $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3 - x} + 3x$

$= \lim_{x\to-\infty} \sqrt[3]{x^3\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} + 3x$

$= \lim_{x\to-\infty} x\left(-\sqrt[3]{1 - \frac{1}{x^2}} + 3\right) = -\infty$

(لان $\lim_{x\to-\infty} 1 - \frac{1}{x^2} = 1$)

2) $\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \sqrt[3]{x^2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x - x\sqrt[3]{\frac{1}{x}}}{x}$

$= \lim_{x\to+\infty} 1 - \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 1$ (لان $\lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{\frac{1}{x}} = 0$)

3) $\lim_{x\to+\infty} x - \sqrt[3]{2x - 1} = \lim_{x\to+\infty} x\left(1 - \sqrt[3]{\frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}\right) = +\infty$

(لان $\lim_{+\infty} \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3} = 0$)

4) $\lim_{x\to5} \frac{\sqrt[3]{x+22} - 3}{2x - 10} = \lim_5 \frac{x+22-27}{2(x-5)(\sqrt[3]{x+22} + 3\sqrt[3]{x+22} + 3^2)} = \frac{1}{54}$

5) $\lim_{x\to1} \sqrt[3]{x} - 1 = 0$

3- لنحل المتراجحة التالية : $\sqrt[5]{2x - 1} \geq 2$

$\sqrt[5]{2x - 1} \geq 2 \Leftrightarrow 2x - 1 \geq 32 \Leftrightarrow x \geq \frac{33}{2}$ وبالتالي $S = \left[\frac{33}{2}; +\infty\right[$

التمرين الثاني :

$f(x) = \sqrt[3]{x + 1} - 1$

1- $x \in D_f \Leftrightarrow x + 1 \geq 0$ وبالتالي $D_f = [-1; +\infty[$

-الدالة $x \mapsto -1$ متصلة على $\mathbb{R}$ وبالخصوص على $[-1; +\infty[$

-الدالة $x \mapsto \sqrt[3]{x + 1}$ متصلة على $[-1; +\infty[$ (لانها دالة حدودية)

وبالتالي f متصلة على $[-1; +\infty[$ (عبارة عن مجموع دالتين متصلتين)

2- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \sqrt[3]{x + 1} - 1 = +\infty$

(لان $\lim_{+\infty} \sqrt[3]{x + 1} = +\infty$)

3- لندرس قابلية الاشتقاق f في 0 : $f(0) = 0$

$\lim_0 \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_0 \frac{\sqrt[3]{x + 1} - 1}{x}$

$= \lim_0 \frac{x + 1 - 1}{x(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x + 1} + 1)} = \frac{1}{3} \in \mathbb{R}$

وبالتالي f قابلة الاشتقاق في 0 ومنه فإن (C_f) يقبل مماسا معادلته :

$(T): y = f'(0)(x - 0) + f(0) = \frac{1}{3}x$

4- لنحسب $f'(x)$:

$f'(x) = \left(\sqrt[3]{x + 1} - 1\right)' = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

وبالتالي $\forall x \in]-1; +\infty[\ ; f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}$

5- جدول تغيرات الدالة f:

لدينا $\forall x \in]-1; +\infty[\ ; f'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}} > 0$

ومنه فإن f تزايدية قطعا على $]-1; +\infty[$

-جدول تغيرات الدالة f:

x	-1	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	↗	

6- لدينا f متصلة وتزايدية قطعا على $]-1; +\infty[$

ومنه فإن f تقبل دالة عكسية من $]-1; +\infty[$ نحو المجال J

تحديد J : $J = f(]-1; +\infty[) = [f(-1); \lim_{+\infty} f(x)[$

لدينا $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ و $f(-1) = -1$

وبالتالي فأن : $J = [-1; +\infty[$

7- لنحسب $f(1)$: $f(1) = \sqrt[3]{2} - 1$

لنحسب f'(1): $f'(1) = \frac{1}{3\sqrt[3]{(1+1)^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$

بمان f قابلة الاشتقاق في 1 و $f'(1) \neq 0$ ، وبالتالي f^{-1} قابلة الاشتقاق في $f(1)$

وبالتالي $(f^{-1})'(f(1)) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{\frac{1}{3\sqrt[3]{4}}} = 3\sqrt[3]{4}$

8- لنحدد $f^{-1}(x)$:

ليكن x و y عنصرين من المجال $]-1; +\infty[$

$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt[3]{y + 1} - 1 = x$

$\Leftrightarrow y + 1 = (x + 1)^3 \Leftrightarrow y = (x + 1)^3 - 1$

وبالتالي $\forall x \in [-1; +\infty[\ ; f^{-1}(x) = (x + 1)^3 - 1$

التمرين 3 :

1- لدينا x_1 و x_2 و ... و x_n اعداد حقيقية من المجال $[a; b]$

و $f([a; b]) = [m; M]$

فإن $m \leq f(x_i) \leq M$ لكل i من $\{1.2; ...; n\}$

$$\underbrace{m + \cdots + m}_{\text{n مرة}} = nm \leq \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq \underbrace{M + \cdots + M}_{\text{n مرة}} = nM$$

ومنه $m \leq \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) \leq M$

2- نضع ان : $g(x) = f(x) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

بمأن f متصلة على المجال $[a; b]$ فإن g متصلةعلى $[a; b]$

(عبارة عن مجموع دالتين متصلتين)

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma

هذا الملف تم تحميله من موقع : Talamid.ma

لنبين ان $g(a) \times g(b) < 0$:

لنحسب $g(a)$:

$$g(a) = f(a) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = m - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) < 0$$

لان $m < \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ **حسب سؤال(1)**

لنحسب $g(b)$:

$$g(b) = f(b) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = M - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) > 0$$

لان $m > \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$ **حسب سؤال(1)**

ومنه $g(a) \times g(b) < 0$

وبالتالي حسب مبرهنة القيم الوسطية فإن المعادلة $g(x) = 0$ تقبل على الاقل حل c في $[a; b]$

اذن $g(c) = 0 \Leftrightarrow f(c) - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i) = 0$

ومنه نستنتج ان $\exists c \in [a; b]\ ; f(c) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i)$

للمزيد من الملفات قم بزيارة الموقع : Talamid.ma