

EXERCICES ET PROBLÈMES

Dans tous les exercices, l'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

EXERCICE1:

On considère les quatre points A, B, C et I de coordonnées respectives :

$$A(-1; 2; 1), \quad B(1; -6; -1), \quad C(2; 2; 2) \quad \text{et} \quad I(0; 1; -1)$$

1) a) Calculer le produit vectoriel : $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC)

2) Soit (Q) le plan d'équation : $x + y - 3z + 2 = 0$

et (Q') le plan de repère (O, \vec{i}, \vec{j}) .

a) Pourquoi (Q) et (Q') sont-ils sécants ?

b) Donner une représentation paramétrique de la droite d'intersection (Δ) des plans (Q) et (Q') .

3) Ecrire une équation cartésienne de la sphère (S) de centre I et de rayon 2.

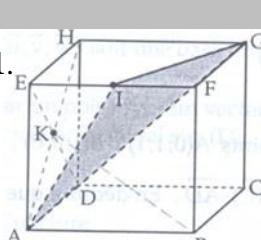
4) On considère les points J et K de coordonnées respectives : $J(-2; 0; 0)$ et $K(1; 0; 1)$

- Déterminer l'intersection de la sphère (S) et de la droite (JK) .

EXERCICE2:

$ABCDEFCH$ est un cube de côté 1. L'espace est orienté par le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

I est le milieu de $[EF]$ et K est le centre du carré $ADHE$.



1) Vérifier que $\overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$. En déduire l'aire du triangle ICA .

2) Calculer le volume du tétraèdre $BICA$. En déduire la distance du point B au plan (ICA) .

EXERCICE3:

On donne les points $A(1, 1, 0)$, $B(1, -1, 1)$ et $C(0, 1, 1)$ et soit le plan (P) : $x + 2y - 2z + 1 = 0$

1) Calculer $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés

a) Montrer que : (ABC) : $2x + y + 2z - 3 = 0$.

b) Vérifier que les plans $(P) \perp (ABC)$.

c) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) intersection des plans (P) et (ABC) .

d) Soit le point $I(2, 1, 1)$ et M un point de (D) . Déterminer M pour que la distance IM soit minimale et en déduire $d(I, (D))$.

2) a) Montrer que les points I , A , B et C ne sont pas coplanaires.

b) Calculer le volume du tétraèdre $IABC$.

c) Calculer $d(I; (ABC))$ et en déduire l'aire du triangle ABC .

3) Soit l'ensemble (S) des points $M(x, y, z)$ vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y - 2z + \frac{38}{9} = 0.$$

a) Montrer que S est une sphère de centre I et tangente au plan (ABC) .

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangent à la sphère (S) et strictement

parallèle à (ABC) .

c) Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) dont on précisera son rayon r et les coordonnées de son centre K .

EXERCICE4:

Considérons les points $A(1;1;2)$; $B(0;1;1)$ et le vecteur $\vec{N} = \vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$.

- 1) Montrer que O , A et B ne sont pas alignés.
- 2) Montrer que le vecteur \vec{N} est orthogonal aux vecteurs \vec{OA} et \vec{OB} .
- 3) En déduire une équation cartésienne du plan (OAB) .
- 4) Soit le plan (P) : $x + y - z = 0$.
 - a- Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ) passant par A et perpendiculaire à (P)
 - b- Déterminer les points M de (Δ) tel que $d(M;(P))=1$.
 - c- Caractériser l'ensemble des points M de (P) tel que $d(M;(\Delta))=\sqrt{2}$.
- 4) a- Donner une équation cartésienne du plan médiateur (Q) du segment $[AB]$.
B - Montrer que (Q) et (P) sont sécants.

EXERCICE5:

On considère les points $A(2,2,0)$; $B(0,2,2)$ et $C(1,0,1)$.

- 1) Calculer les coordonnées de $\vec{u} = \vec{CA} \wedge \vec{CB}$.
- 2) Déterminer une équation du plan (ABC) .
- 3) (D) étant l'intersection du plan (P) et de l'axe (O,\vec{i}) , E étant l'intersection du plan (P) et de l'axe (O,\vec{k}) .
 - Déterminer les coordonnées des vecteurs \vec{DE} et \vec{AB} . Et Calculer $\vec{DA} \cdot \vec{DE}$.
- 4) Montrer que le triangle ABC est isocèle et calculer son aire.
- 5) Déterminer les coordonnées du centre de gravité du triangle ABC .
- 6) a) Calculer $d(I;(P))$ avec $I(0;2;0)$.
b) Déterminer le volume du tétraèdre $IBCA$ par deux méthodes différentes.

EXERCICE6:

On donne les points $A(2,1,0)$; $B(1,2,2)$ et $C(3,3,1)$.

- 1) a) Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
b) En déduire que les points A , B et C ne sont pas alignés.
c) Montrer que $(ABC):x - y + z - 1 = 0$.
d) Calculer le volume du tétraèdre $OABC$.
- 2) Soit H le projeté orthogonal du point O sur le plan (ABC) . Déterminer OH .
- 3) a) Montrer que le triangle ABC est équilatéral.
b) Déterminer les coordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC .
- 4) Soit S l'ensemble des points $M(x,y,z)$ tels que :
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 6y + 5 = 0$$

- a) Vérifier que (S) est une sphère dont on précisera les coordonnées du centre I et le rayon R .
- b) Vérifier que les points A , B et C appartiennent à (S) .
- c) En déduire l'intersection de la sphère (S) et le plan (ABC) .
- d) Donner des équations cartésiennes des plans (P_1) et (P_2) parallèles à (ABC) et tangents à (S) .

EXERCICE7:

On considère les points $A(-1, -1, 1)$; $B(-1, 2, -2)$ et le plan (P) dont une équation cartésienne est :
$$x + y + z - 2 = 0$$

- 1) Montrer que la droite (AB) est parallèle au plan (P) .
- 2) Soit α un réel et (S_α) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que :
$$x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2\alpha y + 2\alpha z + \alpha^2 + \alpha = 0$$
 - a- Montrer que ,pour tout réel α , (S_α) est une sphère de centre I_α et de rayon $R_\alpha = \sqrt{\alpha^2 - \alpha + 1}$.
 - b- Montrer que ,quand α varie dans \mathbb{R} , I_α décrit la droite (AB) .
 - 3) Etudier suivant les valeurs de α , les positions relatives de (S_α) et du plan (P) .
 - 4) Soit I le milieu de $[AB]$ et $I_{1-\alpha}$ le centre de la sphère $(S_{1-\alpha})$.
 - a- Montrer que I est le milieu de $[I_\alpha; I_{1-\alpha}]$.
 - b- En déduire que les sphères (S_α) et $(S_{1-\alpha})$ sont symétriques par rapport au point I .

EXERCICE8:

Soit

$$S = \left\{ M(x,y,z) / x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 4z + 5 = 0 \right\}$$

On considère $A(-2;0;0)$, $B(0;1;0)$ et $C(0;0;-1)$

- 1) Montrer que (S) est une sphère dont on déterminera le centre Ω et le rayon R .
- 2) a) Calculer $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$.
b) En déduire que : $(ABC):x - 2y + 2z + 2 = 0$
- 3) a) Montrer que les points A , B , C et Ω ne sont pas coplanaires
b) Calculer le volume du tétraèdre ΩABC
c) Calculer l'aire du triangle ABC , puis en déduire la distance de point Ω au plan (ABC)
- d) En déduire l'intersection de la sphère (S) et le plan (ABC) est un cercle dont on précisera le centre I et le rayon r .